準幾何學的 割引率의 샤프 比率에 대한 示唆點: 狀態條件附 債券이 없는 生産經濟의 경우*

尹 澤** · 李 雨 憲***

논문초록 본 논문에서 우리는 교환경제에 준기하학적 할인율(quasi-geometric discounting)을 도입하는 것이 샤프 비율 수수께끼(puzzle)를 해결하는데 도움이 되지 않는다는 Luttmer and Mariotti(2003)의 결과가 상태조건부 채권이 없는 생산경제에도 적용됨을 보인다. 이를 위해 우리는 Krusell and Smith(2003a, 2003b)를 따라서 콥-다글라스 생산함수, 로그 효용함수, 감가상각률 = 1인 경우를 고려하여 균형해를 구한다. 이 경우에 준기하학적 할인율을 도입한 성장모형의 확률적 할인인자(stochastic discount factor)에 나타나는 할인율은 통상적인 기하학적 할인율을 사용한 성장모형의 할인율에 비례한다. 이 비례로 말미암아 샤프 비율의 분자(위험 보상)와 분모(수익률의 표준편차)가 동일한 비율로 변하고, 샤프 비율은 변하지 않는다.

핵심 주제어: 준기하학적 할인율, 생산경제, 샤프 비율
경제학문헌목록 주제분류: E0, G0

---

* Kamp Econometrics와 전남대학교의 세미나에서 좋은 논평과 제안을 해주신 참석자들께 감사드린다. 두 번째 저자는 경희대학교 2003년도 개교 55주년 기념 학술진흥 특별연구지원의 지원으로 본 연구를 수행하였음을 밝힌다.

** Board of Governors, Federal Reserve System, e-mail: Tack.Yun@frb.gov
*** 교신 저자, 경희대학교 경제학부 교수, e-mail: wrhee@khu.ac.kr

Ⅰ. 序 論

동태적으로 비일관적인 선호에 대한 관심과 연구가 최근에 많이 증가하고 있다. 동태적으로 비일관적인 선호는 가계의 할인율(discount rate)이 장기보다 단기에 크거나 작기 때문에 발생한다(Strotz(1952), Pollak(1968), Phelps and Pollak(1968), Laibson(1997), Krussel and Smith(2003a, b) 등 참조.) 동태적으로 비일관적인 선호에 대한 관심이 증가하는 한 가지 이유는 혹 이런 종류의 모형이 거시경제학이나 재무경제학에서 제기된 특이사항(anomaly)을 해결하는 데 도움이 되지 않을까하는 기대 때문이다. 이런 기대로 인해 동태적으로 비일관된 선호가 특이사항들을 해결하는가에 관한 연구들이 증가하고 있는데, 그 결과는 혼재되어 있다. 어떤 연구들은, 예를 들면, Angeletos et al. (2001)는 준기하학적 할인율을 확률적 성장모형에 도입하면 통상적인 기하학적 할인율을 사용하는 경우에 비해 소비와 소득 간의 공행성을 더 잘 설명할 수 있다고 주장한다. 이에 비해 Luttmer and Mariotti(2003)는 준기하학적 할인율을 고려하더라도 상태조건부 채권이 없는 교환경제에서 샤프 비율 수수께끼를 설명할 수 없음을 보이고 있다.

최근 연구에서 Rhee and Yun(2007)은 Luttmer and Mariotti(2003)의 결과를 생산경제로 확장시켰는데, 그들의 모형은 상태조건부 채권이 존재하는 경우를 고려하고 있다. 본 논문에서 우리는 Luttmer and Mariotti(2003)의 결과를 상태조건부 채권이 없는 생산경제로 확장하여 확률적 성장모형에 준기하학적 할인율을 도입하더라도 샤프 비율 수수께끼를 설명할 수 없음을 보인다. 우리가 확률적 성장모형에 관심이 있는 이유는 모형을 특정한 형태로 설정하면 닫힌 해를 구할 수 있기 때문이다. 특정한 형태라함은 우리가 잘 아는 로그 효용함수, 콥-다글라스 생산함수, 100% 감가상각률을 상정하는 것이다. 기존 연구와의 차이는 확률적 성장모형의 샤프 비율에 대한 시사점에 주목한다는 것이다.

이미 언급한 것처럼 우리는 준기하학적 할인율하의 확률적 성장모형에서 상태조건부 채권이 없는 경우를 고려한다. 이 경우에 소비자는 자본을 보유함으로써 직접적 수익뿐만 아니라 간접적 수익도 얻는다. 간접적 수익이 존재하는 이유는 동태적으로 비일관적인 선호체계로 인해 현재의 자아와 미래의 자아 간에 전략적 상호작용이 발생할 때 소비자가 지금 현재의 포트폴리오 선택을 통해 자신의 미래 행동을 통제할 수 있기 때문이다. 전략적 상호작용은 소비자로 하여금 자산의 발행자가 제

공하지 않는 또 다른 혜택(수익)을 보게 만든다. 이런 간접적 수익이 존재하는 것은 준기하학적 할인율을 성장모형에 도입하는 경우 새로운 사실은 아니다. Harris and Laibson(2001), Krusell and Smith(2003b)는 현재의 저축이 한계적으로 변할 때 그로 인한 미래의 자본스톡의 한계적 변화를 나타내는 추가적인 항이 일반화된 오일러 방정식에 포함되어야 함을 보이고 있다. 이런 추가적인 항은 통상적인 기하학적 할인율하의 성장모형에서는 나타나지 않으며, 우리는 이것을 총투자수익의 일부인 간접적 투자수익으로 해석할 것이다.[1)]

준기하학적 할인율하의 성장모형에 추가적인 항(간접적 투자수익)이 나타난다는 사실은 이 모형이 샤프 비율 수수께끼를 해결하는 데 도움이 되지 않을까하는 희망을 제기한다. Shiller(1982), Hansen and Jaganathan(1991)은 샤프 비율을 (기간간 한계대체율 혹은) 확률적 할인인자(stochastic discount factor)의 1차 및 2차 적률(moment)의 비율의 함수로 나타낼 수 있음을 보이고 있다. 샤프 비율과 확률적 할인인자를 연결시키려면 자산 보유에 관한 오일러 방정식에서 확률적 할인인자와 자산 수익률을 구분해야 한다. 본고에서 우리는 자산을 보유할 때 얻는 총수익률을 직접적 수익률과 간접적 수익률의 조합으로 정의한다. 이런 정의하에서 준기하학적 할인율을 도입한 성장모형의 확률적 할인인자에 나타나는 할인율은 통상적인 기하학적 할인율하의 성장모형의 할인율에 비례한다. 이 비례로 말미암아 샤프 비율의 분자(위험 보상)와 분모(수익률의 표준편차)가 동일한 비율로 변하고, 샤프 비율은 변하지 않는다. 결국 상태조건부 채권이 없는 생산경제에 준기하학적 할인율을 도

1) 일반화된 오일러 방정식에 추가적인 항이 나타나는 이유는 다음과 같다: 이번 기에 1원을 저축하면 이로부터 발생하는 다음 기의 추가적인 소득이 다음 기의 저축에 영향을 미친다. 통상적인 기하학적 할인율의 경우에는 현재의 자아와 다음 기의 자아가 다음 기의 저축결정에 대해 동의하고, 포락선 논리에 따라 현재의 저축을 결정할 때 이것이 다음 기의 저축에 미치는 영향을 무시할 수 있다. 하지만 준기하학적 할인율의 경우에는 현재의 자아는 미래의 자아가 소비를 지나치게 많이 한다는 것을 알고 있다. 이런 경우 현재의 자아가 이번 기에 저축을 한 단위 늘리면 한계저축성향이 음이 아닌 한 다음 기의 저축이 늘어나는데 다음 기 이후의 소비로부터 느끼는 효용에 대해 현재의 자아와 다음 기의 자아가 달리 평가한다. 즉, 현재의 자아는 다음 기 이후의 효용흐름을 다음 기의 자아에 비해 더 높이 평가한다. (Ⅱ장의 논의에서 알 수 있듯이 0기와 1기의 자아의 효용이 $U_0 = u_0 + \theta(\beta u_1 + \beta^2 u_2 + \beta^3 u_3 + \cdot\cdot\cdot)$, $U_1 = u_1 + \theta(\beta u_2 + \beta^2 u_3 + \cdot\cdot\cdot)$로 주어지면 현재의 자아는 다음 기 이후의 효용흐름을 다음 기의 자아에 비해 $\frac{1}{\theta}$배 더 높이 평가한다.) 따라서 현재의 자아 입장에서 볼 때 이번 기에 저축을 하면 통상적인 기하학적 할인율의 경우에는 발생하지 않는 추가적인 수익이 발생한다.

입하더라도 본고에서 설정한 모형에서는 샤프 비율 수수께끼를 해결하는 데 도움이 되지 않는다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제Ⅱ장에서는 준기하학적 할인율하의 상태조건부 채권이 없는 생산경제 성장모형에서 완전경쟁시장 균형해와 사회계획자(social planner) 균형해를 구한다. 이를 위해 우리는 로그 효용함수, 콥-다글라스 생산함수, 100 % 감가상각률 등을 상정한다. 제Ⅲ장에서는 총투자수익률을 직접적 및 간접적 투자수익률의 조합으로 정의할 경우 준기하학적 할인율하의 샤프 비율이 기하학적 할인율하의 샤프 비율과 동일함을 보인다. 제Ⅳ장에서는 본 논문에서 발견한 사실을 간략히 정리한 후 앞으로의 연구과제에 대하여 언급한다.

Ⅱ. 準幾何學的 割引率 模型

본 장에서는 상태조건부(state-contingent) 채권이 없는 준기하학적 할인율하의 확률적 성장모형에서 반복적(recursive) 완전경쟁시장 균형해와 사회계획자 균형해를 구한다.

1. 完全競爭市場 模型

본 절에서는 준기하학적 할인율하의 확률적 성장모형의 완전경쟁시장 균형에 대하여 간단히 논한다.

대표적 가계의 t기 선호는 다음의 효용함수로 주어진다고 하자.

$$u(C_t, 1-H_t) + \theta\beta\left[\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k E_t\, u(C_{t+1+k}, 1-H_{t+1+k})\right] \tag{1}$$

위의 식에서 C_t, H_t는 각각 t기의 소비와 노동을 나타내고, $\theta\beta$와 β는 각각 단기와 장기 할인율을 나타내며, t기 효용함수 $u(C_t, 1-H_t)$는 두 번 미분가능하고 각각의 구성변수에 대해 오목하다.

가계는 자본스톡을 소유하고, 이를 생산에 사용한다. 매기에 자본스톡은 다음의 운동방정식에 따라 축적된다.

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t \tag{2}$$

위의 식에서 δ는 감가상각률, K_t, I_t는 각각 t기의 자본스톡과 투자를 나타낸다. $\widehat{R}_t$을 t기의 실질임대율이라고 하면 자본스톡 한 단위를 $t-1$기부터 t기까지 보유함으로써 발생하는 (직접적) 실질수익률은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_t = 1 - \delta + \widehat{R}_t \tag{3}$$

가계가 직면하는 매기의 예산제약식은 다음과 같다.

$$C_t + K_{t+1} \leq W_t H_t + R_t K_t \tag{4}$$

위의 식에서 W_t는 t기의 실질임금률을 나타낸다. 생산요소와 최종재 시장은 완전경쟁이라고 가정한다. 따라서 개별가계는 의사결정을 할 때 생산요소와 최종재의 가격을 주어진 것으로 간주한다.

대표적 가계는 초기 자본스톡 K_0가 주어지고, $\{W_t, R_t\}$ $(t = 0, 1, \cdot\cdot\cdot, \infty)$가 주어지면 식 (4)의 제약하에서 기대효용함수 (1)을 최대화한다. 가계의 최적화 문제의 1계조건은 다음과 같다.

$$\frac{u_2(C_t, 1-H_t)}{u_1(C_t, 1-H_t)} = W_t \tag{5}$$

$$1 = \theta\beta E_t\left\{\frac{u_1(C_{t+1}, 1-H_{t+1})}{u_1(C_t, 1-H_t)}\left[R_{t+1} + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\frac{\partial K_{t+2}}{\partial K_{t+1}}\right]\right\} \tag{6}$$

식 (5)는 소비와 여가 사이의 한계대체율이 실질임금과 같다는 것을 의미한다. 식 (6)은 준기하학적 할인율하의 일반화된 오일러 방정식이다. 일반화된 오일러 방정식은 부록에서 도출하고 있다.

개별기업 i의 생산함수는 다음과 같이 규모수익이 일정한 것으로 가정한다.

$$Y_{it} = A_t F(K_{it}, H_{it}) \tag{7}$$

위의 식에서 A_t는 t기의 총합적(aggregate) 기술충격을 나타낸다. 균형에서 실질임금과 실질임대율은 다음과 같다.

$$W_t = A_t F_2(\overline{K}_t, H_t);\ \hat{R}_t = A_t F_1(\overline{K}_t, H_t) \tag{8}$$

위의 식에서 F_i는 i번째 생산요소에 대한 편미분을 나타내고, $\overline{K}_t$는 경제전체의 평균 자본스톡을 나타낸다.

Krusell, Kuruscu and Smith(2002)는 준기학적 할인율하의 성장모형에서 완전경쟁시장 균형을 분석하려면 개별가계가 보유하는 자본스톡 K_t와 경제전체의 평균 자본스톡 $\overline{K}_t$을 구분해야 한다고 강조하였다. 개별가계의 자본스톡에 대한 보유결정은 $K_{t+1} = g(K_t, \overline{K}_t, A_t)$로 주어지고, 경제전체의 자본스톡은 $\overline{K}_{t+1} = G(\overline{K}_t, A_t)$ $(t = 0, 1, \cdot\ \cdot\ \cdot, \infty)$로 주어진다고 하자. 대칭적 균형에서 $K_t = \overline{K}_t$가 성립하므로 다음 식이 성립한다.

$$g(\overline{K}_t, \overline{K}_t, A_t) = G(\overline{K}_t, A_t),\ t = 0, 1, \cdot\ \cdot\ \cdot, \infty. \tag{9}$$

이제 준기하학적 할인율하의 확률적 성장모형의 완전경쟁시장 균형해를 요약해보자. 우선, 일반화된 오일러 방정식 (6)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$1 = \theta\beta E_t\left\{\frac{u_1(C_{t+1}, 1-H_{t+1})}{u_1(C_t, 1-H_t)}\left[R_{t+1} + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)g_1(\overline{K}_{t+1}, \overline{K}_{t+1}, A_{t+1})\right]\right\} \tag{10}$$

위의 식에서 R_t는 다음과 같이 주어진다.

$$R_t = 1 - \delta + A_t F_1(\overline{K}_t, H_t) \tag{11}$$

식 (8)을 노동공급 최적화 조건 (5)에 대입하면

$$\frac{u_2(C_t,1-H_t)}{u_1(C_t,1-H_t)}=A_tF_2(\overline{K}_t,H_t). \tag{12}$$

사회적 자원제약식은 다음과 같다.

$$C_t+\overline{K}_{t+1}=A_tF(\overline{K}_t,H_t)+(1-\delta)\overline{K}_t. \tag{13}$$

요약하면 균형해 $\{C_t, H_t, \overline{K}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$와 균형실질가격 $\{W_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$은 K_0와 $\{A_t\}_{t=0}^{\infty}$이 주어지면 매기$(t=0,1,\cdot\cdot\cdot,\infty)$에 식 (8), (10), (11), (12)와 식 (13)을 풀어서 구할 수 있다.

2. 完全競爭均衡의 닫힌 解

이제 완전경쟁시장 균형해를 구해 보자. 이를 위해서 우리는 Krusell and Smith(2003a, 2003b)를 따라서 콥-다글라스 생산함수, 로그 효용함수, 감가상각률 = 1인 경우를 고려한다.

총합적 생산함수가 콥-다글라스 형태를 취한다고 하자.

$$Y_t=A_t\overline{K}_t^{\,\alpha}H_t^{1-\alpha}, \tag{14}$$

위의 식에서 α는 생산의 자본탄력성을 나타낸다. 가계의 효용함수는 다음과 같다.

$$u(C_t,1-H_t)=\log C_t+b\log(1-H_t), \tag{15}$$

이 식에서 b는 상수이다.

Krusell, Kuruscu and Smith(2002)는 준기하학적 할인율하의 성장모형에서 개별가계의 저축함수는 보유 자본스톡의 선형함수임을 보이고 있다. 따라서 우리는

개별가계의 자본스톡 보유 결정함수가 다음의 형태를 가진다고 가정한다.

$$g(K_t, \overline{K}_t, A_t) = \frac{K_t}{\overline{K}_t} G(\overline{K}_t, A_t) \tag{16}$$

또한 소비와 투자 간의 균형분배는 다음과 같다고 가정한다.

$$\overline{K}_{t+1} = s\alpha Y_t;\ C_t = (1 - s\alpha) Y_t \tag{17}$$

위의 식에서 s는 아래에서 정의될 상수이다.

균형에서 $K_t = \overline{K}_t$이다. 따라서 개별가계의 다음 기 자본스톡 보유 결정함수의 자본스톡(K_{t+1})에 대한 편미분은 다음과 같다.

$$g_1(\overline{K}_{t+1}, \overline{K}_{t+1}, A_{t+1}) = \frac{\overline{K}_{t+2}}{\overline{K}_{t+1}} \tag{18}$$

주어진 효용함수와 생산함수로부터 식 (6)에 있는 오일러 방정식은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\frac{\overline{K}_{t+1}}{C_t} = \theta\alpha\beta + \theta\beta E_t\left[\left(\alpha + \frac{1}{\theta} - 1\right)\frac{\overline{K}_{t+2}}{C_{t+1}}\right] \tag{19}$$

추가로 식 (17)로부터 $\frac{\overline{K}_{t+1}}{C_t} = \frac{s\alpha}{1 - s\alpha}$임을 알 수 있다. 이것을 식 (19)에 대입하여 s를 구하면 다음과 같다.

$$s = \frac{\theta\beta}{1 - \beta(1 - \theta)} \tag{20}$$

이 식으로부터 $0 < \beta < 1$이면 $\theta > 0$일 때 $0 < s < 1$임을 알 수 있다.

균형 노동시간은 매기에 일정함을 보일 수 있다. 주어진 효용함수와 생산함수로부터 노동공급 균형조건 (12)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{bC_t}{1-H_t} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{H_t} \tag{21}$$

이 식에 $\frac{C_t}{Y_t} = 1 - s\alpha$을 대입하면 균형노동시간은 다음 식을 만족시키는 상수임을 알 수 있다.

$$\frac{bH}{1-H} = \frac{1-\alpha}{1-s\alpha} \tag{22}$$

식 (22)를 식 (17)에 대입하면 경제전체의 평균자본스톡에 대한 결정함수는 다음과 같이 쓸 수 있음을 알 수 있다.

$$\overline{K}_{t+1} = \frac{\alpha\theta\beta}{1-\beta(1-\theta)} A_t \overline{K}_t^{\ \alpha} H^{1-\alpha} \tag{23}$$

이제 매기$(t = 0, 1, \cdot\cdot\cdot, \infty)$에 K_0와 $\{A_t\}_{t=0}^{\infty}$가 주어지면 닫힌 해 $\left\{C_t, Y_t, \overline{K}_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$을 식 (14), (17)와 식 (23)을 풀어서 구할 수 있다.

3. 社會計劃者 模型

완전경쟁시장 균형의 닫힌 해를 설명했으므로 사회계획자의 일반화된 오일러 방정식을 논의해 보자. 우리가 사회계획자의 문제에 관심이 있는 이유는 사회계획자의 저축을 한 단위 변화시킬 때 그로부터 발생하는 한계수익이 완전경쟁시장에서 가계의 그것과 다르기 때문이다.

사회계획자의 문제를 다음과 같이 설정하자.

$$\max\left\{u(C_t,1-H_t)+\theta\beta\left[\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k E_t\,u(C_{t+1+k},1-H_{t+1+k})\right]\right\} \tag{24}$$

subject to

$$C_t+\overline{K}_{t+1}-(1-\delta)\overline{K}_t\le A_tF(\overline{K}_t,H_t),\ \ (t=0,\cdot\cdot\cdot,\infty) \tag{25}$$
$$\text{given }\ \overline{K}_0,\ \ \{A_t\}_{t=0}^{\infty}$$

사회계획자의 일반화된 오일러 방정식은 다음과 같다.

$$1=\theta\beta E_t\left\{\frac{u_1(C_{t+1},1-H_{t+1})}{u_1(C_t,1-H_t)}\left[(1-\delta+A_tF_1(\overline{K}_{t+1},H_{t+1}))\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{\theta}-1\right)G_1(\overline{K}_{t+1},A_{t+1})\right]\right\} \tag{26}$$

사회계획자 문제의 닫힌 해를 구하기 위해 앞에서와 마찬가지로 효용함수는 로그함수이고, 생산함수는 콥-다글라스 형태를 가지며 감가상각률 $\delta=1$이라고 하자. 사회계획자 문제의 일반화된 오일러 방정식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{\overline{K}_{t+1}}{C_t}=\theta\alpha\beta+\theta\beta E_t\left[\left(\alpha+(\frac{1}{\theta}-1)\epsilon_K(\overline{K}_{t+1},A_{t+1})\right)\frac{\overline{K}_{t+2}}{C_{t+1}}\right] \tag{27}$$

위의 식에서 $\epsilon_K(\overline{K}_{t+1},A_{t+1})$은 $t+2$기 자본스톡의 $t+1$기 자본스톡에 대한 탄력성을 나타낸다:

$$\epsilon_K(\overline{K}_{t+1},A_{t+1})=\frac{\partial\ \overline{K}_{t+2}}{\partial\ \overline{K}_{t+1}}\frac{\overline{K}_{t+1}}{\overline{K}_{t+2}} \tag{28}$$

이제 모형의 닫힌 해를 구하기 위해 추측하고 증명하는 방법(guess and verify)을 사용하자. 다음 기 자본스톡의 이번 기 자본스톡에 대한 탄력성이 일정하다고 가정

하자. 그러면 $\epsilon_K(\overline{K}_{t+1}, A_{t+1}) = \epsilon_K$, $t = 0, 1, \cdot\cdot\cdot, \infty$가 된다. 식 (27)을 전방으로 반복하면 다음 식을 도출할 수 있다.

$$\overline{K}_{t+1} = \frac{\theta\alpha\beta}{1-\beta(\alpha\theta+(1-\theta)\epsilon_K)} C_t \tag{29}$$

위의 식은 다음의 terminal condition을 만족시킨다.

$$\lim_{T\to\infty} (\theta\beta(\alpha+(\frac{1}{\theta}-1)\epsilon_K))^T E_t\left[\frac{\overline{K}_{t+T+1}}{C_{t+T}}\right] = 0$$

$C_t = Y_t - \overline{K}_{t+1}$을 식 (29)에 대입하여 정리하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$\overline{K}_{t+1} = \frac{\alpha\beta\theta}{1-\beta(1-\theta)\epsilon_K} Y_t \tag{30}$$

생산함수가 콥-다글라스 형태를 가지므로 식 (28)과 (30)으로 부터 $\epsilon_K = \alpha$임을 알 수 있다.

완전경쟁시장 균형과 마찬가지로 사회계획자 균형에서 노동시간은 일정하다. 식 (29)를 식 (25)에 대입하고, $\epsilon_K = \alpha$를 고려하면 식 (30)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\overline{K}_{t+1} = \frac{\theta\alpha\beta}{1-\alpha\beta(1-\theta)} A_t \overline{K}_t^{\alpha} \overline{H}^{1-\alpha} \tag{31}$$

위의 식에서

$$\overline{H} = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta(1-\theta))}{b(1-\alpha\beta)+(1-\alpha)(1-\alpha\beta(1-\theta))}. \tag{32}$$

결국 매기$(t = 0, 1, \cdot\cdot\cdot, \infty)$에 $\overline{K}_0$와 $\{A_t\}_{t=0}^{\infty}$가 주어지면 식 (29), (30),

(31) 을 이용하여 닫힌 해 $\left\{C_t,\, Y_t,\, \overline{K}_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$을 구할 수 있다.

이제 일반화된 오일러 방정식에서 직접적 및 간접적 수익의 관계를 살펴보자. 준기하학적 할인율하의 일반화된 오일러 방정식에서는 통상적인 기하학적 할인율하의 오일러 방정식에는 없는 간접적 수익이 포함됨을 주목할 필요가 있다. 완전경쟁시장 균형의 간접적 수익은 $g_1(\overline{K}_t, \overline{K}_t, A_t)$으로 주어지고, 사회계획자 문제의 간접적 수익은 $G_1(\overline{K}_t, A_t)$로 주어진다. 이 경우 감가상각률이 1이면 완전경쟁시장 균형이든 사회계획자 균형이든 간접적 수익은 직접적 수익에 비례함을 보일 수 있다.

우선 사회계획자의 간접적 수익을 고려한 후, 평균자본스톡에 대한 결정함수의 편미분이 자본의 한계생산 R_t^*에 비례함을 보이자. 구체적으로 식 (16) 과 (31) 로부터 일반화된 오일러 방정식에서 직접적 수익은 아래와 같이 주어진다.

$$G_1(\overline{K}_t, A_t) = s^* R_t^* \tag{33}$$

위의 식에서

$$s^* = \frac{\theta\alpha\beta}{1-\alpha\beta(1-\theta)}. \tag{34}$$

완전경쟁시장 균형의 경우에는 식 (16) 과 (23) 으로 부터 직접적 수익과 간접적 수익 간의 다음과 같은 관계를 도출할 수 있다.

$$g_1(\overline{K}_t, \overline{K}_t, A_t) = \frac{G(\overline{K}_t, A_t)}{\overline{K}_t} = sR_t \tag{35}$$

위의 식에서

$$s = \frac{\theta\beta}{1-\beta(1-\theta)}. \tag{36}$$

완정경쟁시장 균형과 사회계획자 균형의 일반화된 오일러 방정식 (10) 과 (26) 에서

간접적 수익이 투자수익의 일부로 간주되면 투자수익은 직접적 수익과 간접적 수익을 포함함을 알 수 있다. 또한 식 (34)과 (36)으로 부터 $0<\alpha<1, 0<\beta<1, 0<\theta<1$이면 s와 s^*는 1보다 작다는 것을 알 수 있다. 다음 장에서는 준기하학적 할인율이 투자수익의 샤프 비율에 미치는 영향을 논한다.

Ⅲ. 準幾何學的 割引率과 샤프 比率

식 (10)과 (26)에서 오일러 방정식을 도출하였으므로, 이제는 동태적으로 비일관적인 선호가 소비의 기간간 한계대체율의 변동계수(coefficient of variation)에 대한 통상적인 하한값(lower bound)을 변동시키는 데 도움이 되지 않음을 보인다.

1. 샤프 比率과 準幾何學的 割引率하의 確率的 割引因子 간의 關係

본 절에서 우리는 투자의 샤프 비율과 준기하학적 할인율하의 확률적 할인인자 간의 관계를 논한다. 이를 위해서, 우리는 완전경쟁시장 균형과 사회계획자 균형을 나타내는 일반화된 오일러 방정식(식 (10)과 (26))이 각각 간접적 투자수익률을 포함하고 있음을 강조하고자 한다. 이처럼 간접적 투자수익률이 나타나는 이유는 동태적으로 비일관적인 선호가 주어진 상태에서는 현재의 자아와 미래의 자아 간에 전략적 상호작용이 발생하기 때문이다. 우리는 간접적 투자수익률을 총수익률의 일부로 고려한다. 즉, 준기하학적 할인율하에서의 투자는 직접적 수익률과 간접적 수익률을 창출한다.

준기하학적 할인율 확률적 성장모형에서 적절한 확률적 할인인자는 통상적인 기하학적 할인율 확률적 성장모형의 기간간 한계대체율에 θ를 곱한 것이다. 구체적으로 M_{t+1}을 준기하학적 할인율 모형에서 t기와 $t+1$기 소비 사이의 기간간 한계대체율이라고 하자. 즉,

$$M_{t+1}=\theta\beta\frac{u_1(C_{t+1},1-H_{t+1})}{u_1(C_t,1-H_t)} \tag{37}$$

완전경쟁시장 균형에서의 일반화된 오일러 방정식을 고려해 보자. 식 (37)에서

주어진 확률적 할인인자를 사용하여 오일러 방정식 (10)에 나타난 총투자수익률을 직접적 투자수익률과 간접적 투자수익률로 구분할 수 있다. 이를 위해서, $R_{i,t+1}$과 $X_{i,t+1}$을 각각 $t+1$기의 직접적 및 간접적 투자수익률을 나타낸다고 하자. 즉, $R_{i,t+1}=1-\delta+\hat{R}_{t+1}$; $X_{i,t+1}=g_1(\overline{K}_{t+1},\overline{K}_{t+1},A_{t+1})$. 그러면 $t+1$기의 총투자수익률은 다음과 같다.

$$\widetilde{R}_{i,t+1}=R_{i,t+1}+(\frac{1}{\theta}-1)X_{i,t+1} \tag{38}$$

식 (10)에 식 (37)과 (38)을 대입하면, 일반화된 오일러 방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$1=E_t(M_{t+1}\cdot\widetilde{R}_{i,t+1}) \tag{39}$$

주지하는 바와 같이 이 식은 자산가격 결정모형에서는 잘 알려진 식이다.

사회계획자 균형에서 직접적 및 간접적 투자수익률은 다음과 같다.

$$R_{i,t+1}=R^*_{t+1}\,;\quad X_{i,t+1}=G_1(\overline{K}_{t+1},A_{t+1}) \tag{40}$$

위의 식에서 R^*_{t+1}는 아래에 정의된 것처럼 사회계획자의 직접적 투자수익률을 나타낸다.

$$R^*_{t+1}=1-\delta+A_tF_1(\overline{K}_{t+1},H_{t+1}) \tag{41}$$

이로부터 우리는 일반화된 오일러 방정식 (26)이 식 (39)를 시사함을 알 수 있다.

이제 투자수익률에 대한 기대위험보상(expected risk premium)에 대해 생각해보자. 이를 위해 확률적 할인인자와 공분산이 0인 제로 공분산 포트폴리오가 있고, $\widetilde{R}_{z,t+1}$이 $t+1$기의 제로 공분산 포트폴리오의 수익률을 나타낸다고 하자. 식 (39)로부터 확률적 할인인자의 조건부 기댓값과 제로 공분산 포트폴리오의 기대수익률

간의 관계는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$1 = E_t[M_{t+1}]E_t[\widetilde{R}_{z,t+1}]. \tag{42}$$

자산가격 결정모형에 따르면 식 (39)와 (42)를 이용하여 어떤 자산 i에 대한 기대초과수익률은 다음 식을 만족시켜야 함을 보일 수 있다.

$$E_t[\widetilde{R}_{i,t+1}] - E_t[\widetilde{R}_{z,t+1}] = -\frac{cov_t(M_{t+1}, \widetilde{R}_{i,t+1})}{E_t[M_{t+1}]} \tag{43}$$

위의 식에서 $cov_t(x,y)$는 t기의 정보에 기초한 확률변수 x와 y의 조건부 공분산을 나타낸다. 식 (43)으로부터 자산 i에 대한 기대초과수익률은 자산 i의 수익률과 확률적 할인인자 간의 - 공분산을 확률적 할인인자의 기댓값으로 나눈 값으로 표현되는 것을 알 수 있다.

확률적 할인인자와 자산 i의 투자수익률 간의 상관계수의 절대값은 1보다 작으므로 식 (43)의 - 공분산은 자산 i의 투자수익률의 표준편차와 확률적 할인인자의 표준편차의 곱보다 작아야 한다. 따라서 다음 관계가 성립한다.

$$\frac{E_t[\widetilde{R}_{i,t+1}] - E_t[\widetilde{R}_{z,t+1}]}{\sigma_t(\widetilde{R}_{i,t+1})} \leq \frac{\sigma_t(M_{t+1})}{E_t[M_{t+1}]} \tag{44}$$

위의 식에서 $\sigma_t(x)$는 변수 x의 조건부 표준편차를 나타낸다. Shiller(1982)와 Hansen and Jaganathan(1991)이 보인 것처럼 어떤 자산 i의 초과기대수익률을 그 자산의 수익률의 조건부 표준편차로 나눈 비율은 확률적 할인인자의 조건부 표준편차를 확률적 할인인자의 기댓값으로 나눈 비율보다 클 수 없다.

2. 準幾何學的 割引率下의 샤프 比率

이제 우리는 준기하학적 할인율 성장모형에서 도출된 샤프 비율이 통상적인 기하학적 할인율 성장모형에서 도출된 샤프 비율과 동일함을 보일 수 있다. 식 (33)과

(35) 로부터 간접적 투자수익률은 직접적 투자수익률에 비례함을 알 수 있다. 즉,

$$X_{i,t+1} = \phi R_{i,t+1} \tag{45}$$

위의 식에서 ϕ는 상수이다. 보다 구체적으로, 완전경쟁시장 균형에서는 $\phi = s$ 이고 사회계획자 균형에서는 $\phi = s^*$ 이다. 총수익률은

$$\widetilde{R}_{i,t+1} = (1 + (\frac{1}{\theta} - 1)\phi) R_{i,t+1} \tag{46}$$

이 되고, 직접적 투자수익률에 비례함을 알 수 있다.

마찬가지로, 어떤 자산이든 총수익률은 동일한 관계를 만족시켜야 하므로 다음 식이 성립한다.

$$\widetilde{R}_{z,t+1} = (1 + (\frac{1}{\theta} - 1)\phi) R_{z,t+1}. \tag{47}$$

위의 식에서 $R_{z,t+1}$은 통상적인 기하학적 할인율 성장모형에서 도출된 제로 공분산 포트폴리오의 수익률을 나타낸다. 식 (47) 로부터 다음 식을 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{E_t[\widetilde{R}_{i,t+1}] - E_t[\widetilde{R}_{z,t+1}]}{\sigma_t(\widetilde{R}_{i,t+1})} & \\ &= \frac{(\theta + (1-\theta)\phi) E_t[R_{i,t+1}] - (\theta + (1-\theta)\phi) E_t[R_{z,t+1}]}{(\theta + (1-\theta)\phi)\sigma_t(R_{i,t+1})} \\ &= \frac{E_t[R_{i,t+1}] - E_t[R_{z,t+1}]}{\sigma_t(R_{i,t+1})} \end{aligned} \tag{48}$$

따라서 준기하학적 할인율은 모든 자산의 총수익률에 영향을 미치지만 샤프 비율은 변화시키지 않음을 알 수 있다.

Ⅳ. 結 論

본 논문에서 우리는 Luttmer and Mariotti(2003)의 결과를 상태조건부 채권이 없는 생산경제로 확대하여 준기하학적 할인율을 확률적 성장모형에 도입하더라도 샤프 비율 수수께끼를 해결할 수 없음을 보였다. 이를 위해 우리는 생산함수는 콥-다글라스 형태이고, 효용함수는 로그함수이며, 감가상각률은 1이라고 가정하였다. 이런 설정하에서 준기하학적 할인율을 확률적 성장모형에 도입하면 확률적 할인인자를 위한 할인율은 통상적인 기하학적 할인율 모형의 그것에 비례함을 알 수 있다. 이 비례로 말미암아 샤프 비율의 분자(위험 보상)와 분모(수익률의 표준편차)가 동일한 비율로 변하고, 샤프 비율은 변하지 않는다. 이 결과는 일반적으로 많이 사용하는 모수값을 사용할 경우 확률적 성장모형이 미국에서 관찰되는 샤프 비율을 잘 설명하지 못한다는 Lettau and Uhlig(1997a, b)의 결과를 보완한다.

졸고에서 제시한 결과는 준기하학적 할인율 모형을 사용하여 기존의 샤프 비율 수수께끼 등을 해결하는 것은 쉽지 않다는 것을 시사한다. 그러나 이것이 준기하학적 할인율을 성장모형에 도입하는 것이 기존의 샤프 비율 수수께끼를 해결하는 데 도움이 되지 않는다는 것을 단정적으로 보여주는 것은 아니다. 본고에서 우리는 특수한 설정하에 닫힌 해를 구하였고, 그것이 샤프 비율 수수께끼 해결에 도움이 되지 않음을 보였다. 만약 닫힌 해를 구할 수 있는 설정을 달리하거나, 분석적으로 닫힌 해를 구할 수 없는 일반적인 설정하에서 균형해 혹은 균형해의 근사치를 분석하면 다른 결과를 얻을 수 있을지도 모르며, 이것은 후속연구로 미룬다.

■ 참 고 문 헌

1. Angeletos, George-Marios, David Laibson, Andrea Repetto, Jeremy Tobacman and Stephen Weinberg, "The Hyperbolic Consumption Model: Calibration, Simulation, and Empirical Evaluation," *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 15, No. 3, 2001, pp. 47-68.
2. Hansen, Lars Peter and Ravi Jaganathan, "Impliations of Security Market Data for Models of Dynamic Economies," *Journal of Political Economy*, Vol. 99, 1991, pp. 225-262.
3. Harris, Christopher and David Laibson, "Dynamic Choices and Hyperbolic Consumers," *Econometrica*, Vol. 69, No. 4, 2001, pp. 935-957.
4. Krusell, Per, Burhanettin Kuruscu and Anthony A. Smith, "Equilibrium Welfare Government Policy with Quasi-geometric Discounting," *Journal of Economic Theory*, Vol. 105, 2002, pp. 45-72.
5. Krusell, Per and Anthony A. Smith, "Consumption-Savings Decisions with Quasi-Geometric Discouting," *Econometrica*, Vol. 71, No. 1, 2003a, pp. 365-375.
6. ______________________________, "Consumption-Savings Decisions with Quasi-Geometric Discouting: The Case with a Discrete Domain," Mimeo, University of Rochester, 2003b.
7. Laibson, David., "Golden Eggs and Hyperbolic Discounting," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 112, 1997, pp. 443-477.
8. Lettau, Martin and Harold Uhlig, "Preference, Consumption Smoothing, and Risk Premia," mimeo, Center for Economic Research, 1997a.
9. ___________________________, "Asset Prices and Real Business Cycles: A Diagnostic View," mimeo, Center for Economic Research, 1997b.
10. Luttmer, Erzo G.J. and Thomas Mariotti, "Subjective Discounting in an Exchange Economy," *Journal of Political Economy*, Vol. 111, No. 5, 2003, pp. 959-989.
11. Phelps, Edmund. S. and R.A. Pollak, "On Second-best National Saving and Game-equilibrium Growth," *Reiview of Economic Studies*, Vol. 35, 1968, pp. 185-199.
12. Pollak R.A., "Consistent Planning," *Reiview of Economic Studies*, 35, 1968, pp. 201-208.
13. Rhee, Wooheon and Tack Yun, "Implications of the quasi-geometric Discounting on the Sharpe Ratio in the Production Economy with State-Contingent Claims," mimeo, 2007.
14. Shiller, Robert J., "Consumption, Asset Markets, and Macroeconomic Fluctuations," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol. 17, 1982, pp. 203-238.
15. Strotz, Robert H., "Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization," *Review of Economic Studies*, Vol. 23, 1956, pp. 165-180.

부록 : 一般化된 오일러 方程式의 導出

$L(K_t,\overline{K}_t,A_t)$을 아래에 있는 동태적 프로그램의 가치함수(value function)라고 하자.

$$L(K_t,\overline{K}_t,A_t)=\max_{C_t,H_t,K_{t+1}}u(C_t,1-H_t)+\beta E_t\left[L(K_{t+1},\overline{K}_{t+1},A_{t+1})\right] \tag{A1}$$

subject to

$$C_t+K_{t+1}\le W_tH_t+R_tK_t,\quad t=0,1,\cdot\cdot\cdot,\infty \tag{A2}$$

$\Phi(K_t,\overline{K}_t,A_t)$는 대표적 가계가 t기에 직면한 최적화 문제의 가치함수라고 하자. 본문의 식 (4)를 식 (1)에 대입하면 $\Phi(K_t,\overline{K}_t,A_t)$에 관한 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi(K_t,\overline{K}_t,A_t)=\max_{H_t,K_{t+1}}u(R_tK_t+W_tH_t-K_{t+1},1-H_t)+\theta\beta E_t\left[L(K_{t+1},\overline{K}_{t+1},A_{t+1})\right] \tag{A3}$$

이 문제의 1계조건은 다음과 같다.

$$u_1(C_t,1-H_t)=\theta\beta E_t\left[L_1(K_{t+1},\overline{K}_{t+1},A_{t+1})\right], \tag{A4}$$

$$u_1(C_t,1-H_t)W_t=u_2(C_t,1-H_t) \tag{A5}$$

$\Phi(K_t,\overline{K}_t,A_t)$을 K_t에 대해서 미분하고 식 (A4)와 (A5)를 적용하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$\Phi_1(K_t,\overline{K}_t,A_t)=u_1(C_t,1-H_t)R_t \tag{A6}$$

식 (A1) 을 식 (A3) 에 대입하면 다음 식을 도출할 수 있다.

$$\theta L(K_t, \overline{K}_t, A_t) = \Phi(K_t, \overline{K}_t, A_t) - (1-\theta)u(C_t, 1-H_t). \tag{A7}$$

$L(K_t, \overline{K}_t, A_t)$을 K_t에 관하여 미분하고 1계조건 (A4) 와 (A5) 를 이용하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta L_1(K_t, \overline{K}_t, A_t) &= \Phi_1(K_t, \overline{K}_t, A_t) \\ &\quad - (1-\theta)u_1(C_t, 1-H_t)(R_t - \frac{\partial K_{t+1}}{\partial K_t}) \end{aligned} \tag{A8}$$

식 (A6) 을 식 (A8) 에 대입하면

$$\theta L_1(K_t, \overline{K}_t, A_t) = u_1(C_t, 1-H_t)(\theta R_t + (1-\theta)\frac{\partial K_{t+1}}{\partial K_t}). \tag{A9}$$

식 (A9) 과 식 (A4) 로부터 다음의 일반화된 오일러 방정식을 구할 수 있다.

$$1 = \theta\beta E_t\left\{\frac{u_1(C_{t+1}, 1-H_{t+1})}{u_1(C_t, 1-H_t)}\left[R_{t+1} + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\frac{\partial K_{t+2}}{\partial K_{t+1}}\right]\right\} \tag{A10}$$

Implications of the quasi-geometric Discounting on the Sharpe Ratio in the Production Economy without State-Contingent Claims

Tack Yun* · Wooheon Rhee**

Abstract

In this paper, we extend the results of Luttmer and Mariotti (2003) to the production economy without state contingent claims and show that a stochastic growth model with quasi-geometric discounting cannot solve the Sharpe ratio puzzle. We do this under a specific parameterization that is, additive separability between consumption and leisure, logarithmic utility for consumption, and complete depreciation of the capital stock within a period. Under this specification the discount rate for the stochastic discount factor in models with quasi-geometric discounting is proportional to the discount rate of consumers with ordinary geometric discounting. This proportionality changes the numerator (the risk premium) and the denominator (return volatiltity) in the same proportion and does not change the Sharpe ratio.

Key Words: quasi-geometric discounting, production economy, Sharpe ratio

* Board of Governors, Federal Reserve System

** Professor, Department of Economics, Kyunghee University