베이즈 메커니즘 實行에 관한 硏究*

金 奉 朱**

논문초록 본 연구는 주인과 다수 대리인이 있는 경우의 메커니즘 디자인 문제를 다룬다. Mookherjee and Rechelstein(1992)은 사전확률분포가 주인과 대리인의 공통지식이고 연속인 경우 베이즈 유인 일치적인 배분규칙을 (약한)우월 전략으로 대등하게 실행할 수 있는 필요충분조건을 찾아냈다. 그러나 그 메커니즘의 균형은 유일하지 않다. 본고에서는 이산인 사전확률분포를 가정하고 우월 전략으로 대등하게 실행할 때 원하지 않는 균형을 낳을 수 있음을 예제로 보여준다. 그런데 사전확률분포가 주인과 대리인의 공통지식이나 이산분포인 경우, 각 대리인에게 자신의 환경을 보고하게 하고 보고한 것에 대해 상호간에 이의를 제기하는 메커니즘을 채택한다. 이때 복수균형의 문제를 제거하고, 베이즈 내쉬 균형개념으로 대등하게 완전실행할 수 있음을 보였다. 다음으로 주인이 대리인들의 사전확률분포에 대한 정확한 지식이 없는 경우를 살펴본다. 이 때 전술한 메커니즘을 이용하면 대리인들이 순수전략만을 사용할 때 주인은 차선의 결과를 베이즈 균형 개념으로 실행할 수 있음을 보일 수 있다. 더욱이 순차적 게임에 의한 메커니즘을 설계하면 대리인들이 혼합전략을 사용하게 하더라도 주인은 완전 베이즈 균형 개념으로 차선의 결과를 실행할 수 있음을 보였다.

핵심 주제어: 베이즈 실행, 완전실행, 실질적 실행
경제문헌목록 주제분류: D8

* 본 연구는 저자의 박사학위 논문의 일부에 기초한 것이다. 박사과정 이수를 지원해준 KT에 감사하는 마음을 전한다. 학위논문을 지도해주신 김완진 선생님, 신성휘 선생님, 최재필 선생님께도 깊이 감사드린다. 본 논문의 초고에 대해 유익한 논평을 해주신 익명의 두 분의 심사위원과 편집과정에서 큰 도움을 주신 KT 경영연구소 정인호 박사님께도 진심으로 감사드린다. 끝으로 저자에게 메커니즘 디자인 이론을 체계적으로 가르쳐 주신 고 김태성 선생님을 추모한다.
** KT 경영연구소 선임연구원, e-mail: bongjkim@kt.co.kr

I. 서 론

Ledyard(1978)는 기존의 베이즈 내쉬 균형에 입각한 메커니즘 디자인 이론에서 사전확률이 주인뿐만 아니라 모든 대리인들에게 알려져 있다고 하는 가정에 의문을 제기하고 있다. 물론, 사전확률이 Harsanyi(1967)에서 정의하는 것처럼 모든 관련된 정보와 정보에 밝은 외부 관측자의 믿음(belief)을 결합한 것이고, 주인과 각 대리인들이 그와 같은 관측자라면 이러한 가정은 정당화될 수 있을 것이다. 그러나 사전확률이 과거의 경험이나 상호간의 정보교환 등 어떤 다른 형태를 통하여 얻은 것이라면 문제는 달라진다. 이러한 경우 대리인들이 사전확률의 보고를 조작함(manipulate)으로써 베이즈(Bayesian) 메커니즘에서 이득을 얻을 수 있을 것이다. 따라서 대리인들이 사전확률에 대하여 주인보다 더 정확한 정보를 가지고 있을 때 어떤 배분 규칙을 실행할 수 있는 지가 문제가 된다. 본고에서는 이러한 상황하에서 자원배분 문제를 고찰하고자 한다. 본고에서는 특별한 조건하에서는 대리인들이 사전확률을 진실되게 보고하는 메커니즘을 만들 수 있음을 보인다. 따라서 주인이 사전확률분포를 정확히 알지 못하더라도 어떤 손실 없이 그것을 아는 경우와 같은 성과를 얻을 수 있음을 증명한다.

Mookherjee and Reichelstein(1992)은 베이즈 유인 일치성을 보다 강력한 우월전략 유인 일치성으로 바꾸어도 전혀 손실이 없는 환경을 찾아냈다. 즉, 그들은 최적 베이즈 메커니즘의 이전 지급을 변화시켜서 대리인들에게 우월 전략을 주는 것이 가능하고, 모든 참가자들의 기대 효용은 변화시키지 않는 메커니즘 디자인의 문제들을 찾아냈다. 우월 전략 메커니즘의 장점은 대리인들이 다른 대리인들이 어떻게 행동하는지에 대한 어떤 이론을 가질 필요가 없다는 것이다. 또한 다른 대리인들의 선호를 알 필요조차 없다는 것도 장점이다.[1] 그러나 Mookherjee and Reichelstein(1992)이 베이즈 메커니즘에서 유도한 우월 전략 메커니즘도 다음과 같은 문제점을 갖는다. 첫째, 주인이 대리인들이 공통지식으로 갖고 있는 사전확률을 알고있다고 하자. 이때 우월 전략으로 메커니즘을 실행하더라도 복수 균형의 문제를 가질 수 있다는 점이다. 특히 두 명 이상의 대리인들이 있는 경우에 주인이 원하지 않는 균형이 대리인들의 입장에서는 파레토 우월한(Pareto superior) 것일

1) 대리인들이 다른 대리인들의 행동을 고려할 필요가 없이 최적 전략을 갖는다는 점이 그렇다.

때 문제가 된다. 따라서 완전실행을 위해서는 주인이 원하지 않는 균형을 제거해야 한다. 둘째, Mookherjee and Reichelstein(1992)이 고려하는 배분 규칙은 차선의 배분이므로 주인과 대리인의 공통지식인 사전확률에 의존한다는 것이다. 따라서 주인이 사전확률을 정확히 모르는 경우 그의 목표는 가변적이다. 이 때 대리인들이 알고 있는 공통지식인 사전확률을 현시하도록 하는 메커니즘의 설계가 필요하다. 본 논문에서는 주인이 사전확률을 정확히 모르는 경우에, 대리인들의 사전확률 및 유형의 보고에 의존하여 사전확률을 공통지식으로 갖고 있을 때의 자원 배분을 실행할 수 있는지를 살펴본다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제Ⅱ절에서는 기본 모형과 주요한 가정들에 대하여 살펴본다. 제Ⅲ절에서는 연속분포를 가정한 Mookherjee and Reichelstein (1992)의 모형을 이산분포로 확장하여 베이즈 내쉬 균형개념으로 대응한 실행을 할 수 있게 하는 충분조건을 제시한다. 그리고 우월 전략으로 대등한 실행을 하는 경우에도 복수 균형을 갖고, 주인이 원하지 않는 균형이 대리인들의 입장에서 볼 때 파레토 우월한(Pareto superior) 경우를 예를 들어 보인다. 제Ⅳ절에서는 이산인 사전확률분포가 주인과 대리인의 공통지식인 경우 배분 규칙을 완전실행할 수 있는 충분조건을 찾는다. 제Ⅴ절에서는 주인이 대리인들의 사전확률분포에 대하여 불확실성을 갖는 경우에 사전확률분포를 공통지식으로 가질 때 최적 배분인 '차선의 배분규칙'과 같은 성과를 주거나 그에 근사한 성과를 주는 메커니즘을 완전실행할 수 있는 충분조건을 찾는다.

Ⅱ. 기본 모형

1명의 주인(또는 계획자)과 n명의 대리인들로 구성된 경제를 상정하자. 이때 대리인들의 집합을 $N=\{1,\ldots,n\}$이라 한다. 경제 내에는 k개의 재화가 있고 그 집합을 $K=\{1,\cdot\cdot\cdot,k\}$로 표시하고 화폐가 있다고 하자. 대리인 i에게 배분되는 재화들의 벡터를 $q_i=(q_i^1,\cdot\cdot\cdot,q_i^k)$, 대리인들에게 할당되는 재화들의 벡터는 $q=(q_1,\ldots,q_n)$, 주인으로부터 각 대리인들에 대한 이전지급의 벡터를 $t=(t_1,\ldots,t_n)$라고 하자.

대리인의 유형 공간 $\Theta_i(i \in N)$는 유한한 s개의 원소를 갖는다.[2] 즉, $\Theta_i = \{\theta_i^1, \ldots, \theta_i^s\}$이고 그것의 한 원소를 θ_i로 표시한다. 가능한 대리인들의 유형공간은 $\Theta = \times_i \Theta_i$이고, 그것의 한 원소를 $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$라고 하자. 벡터 q를 생산하는 데 따른 주인의 편익을 $B(q)$라 하자. 이때 주인의 효용함수는 $B(q) - \sum t_i$이다. 대리인 i의 유형이 θ_i로 실현되었을 때 q_i를 생산할 때 비용함수를 $C_i(q_i, \theta_i)$라고 하고, $\partial C_i(\cdot, \cdot)/\partial \theta_i > 0$라고 가정한다. 이때 q_i의 생산 할당에 대해 t_i의 이전 지급이 주어지면, θ_i 유형인 i의 효용은 $U^i(q_i, t_i, \theta_i) = t_i - C_i(q_i, \theta_i)$이다. 그리고 효용함수와 비용함수는 유계(bounded)이다.

유형들에 대한 가능한 사전확률분포에 대한 유한 집합을 P라 하고, 그것의 한 원소를 p라 한다. 이때 이산분포함수인 p는 확산(diffuse)되어 있어 모든 θ에 $p(\theta) > 0$이다. 또한, 대리인들의 유형들은 독립적으로 분포한다고 가정하자. 이는 대리인 i의 유형 θ_i의 한계 분포(marginal distribution)를 $p^i(\theta_i)$라고 할 때, $p(\theta) = p^1(\theta_1) \times \cdots \times p^n(\theta_n)$을 함의한다. 중간 단계에서 각 대리인들은 자신의 실현된 유형을 알고 있지만 타인들의 실현된 유형은 모른다. 또한, 대리인들은 Θ 위에서 사전확률분포 p를 공통지식(common knowledge)으로 갖고, 주인은 P에 대해서는 알고 있으나 p를 알지 못한다고 하자. 이러한 가정 하에서 어떤 환경하에서 주인이 실현된 사전확률분포 p를 알지 못하더라도 아무런 손실 없이 다음에 정의하는 θ와 p에 의존하는 이전지급과 생산량의 벡터인 차선의 배분규칙 $x(\theta, p)$를 얻을 수 있는지를 살펴보자. 먼저 p가 주인과 대리인들의 공통지식인 경우 어떤 배분규칙을 $x(\theta)$라 표기하자. 이때 $x(\theta)$가 중간단계의 개인 합리성(IR)과 베이즈 유인일치성(BIC)을 충족한다는 것은 다음을 의미한다.

정의 1 (중간단계의 개인적 합리성 제약: IR(p)): θ_i 유형의 대리인 i가 주어진 메커니즘에서 탈퇴하여 얻을 수 있는 유보 효용 수준을 '0'이라 하고, $\theta_{-i} = (\theta_1, \cdots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \cdots, \theta_n)$이라 하자 이때 $\forall i$, $\forall \theta_i$, $E_{\theta_{-i}}(U_i(x(\theta_{-i}, \theta_i))$

2) 각 대리인들의 가능한 유형의 집합이 다르다고 가정하더라도 본고에서 얻은 결과는 성립한다.

$\mid \theta_i, p) \geq 0$이면, 배분 규칙 x는 '개인적 합리성'(individual rationality)을 만족한다.

정의 2(베이즈 유인 일치성: BIC(p)): $\forall i$와 $\forall \theta_i$, $\hat{\theta}_i$, $E_{\theta_{-i}}(U_i(x(\theta_{-i}, \theta_i)) \mid \theta_i, p) \geq E_{\theta_{-i}}(U_i(x(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i)) \mid \theta_i, p)$이면, 배분 규칙 x는 '베이즈 유인 일치적'(Bayesian incentive compatible)이다.

이때 차선의 배분규칙 x는 다음과 같이 정의된다.

$$x(\theta, p) = \arg\max [E\{B(q) - \sum t_i \mid p\} \text{ s.t. } IR(p),\ BIC(p)]$$

이는 주인과 대리인이 p를 공통지식으로 갖는 경우 대리인들의 중간단계의 개인합리성과 베이즈 유인 일치성을 만족하는 주인의 기대효용을 최대화하는 문제의 해이다. 경제의 자원 배분은 (θ, p)에 의하여 결정된다. 이는 대리인 i에 대해 $a_i = (q_i, t_i) \in R^k \times R$의 자원 배분을 주는 벡터 $(q, t) = R^{n \times k} \times R^n$이다. 배분규칙 x는 가능한 경제 상황 θ에서 자원배분을 대응시켜주는 함수 $x: \Theta \to A$이다. 배분 규칙을 $x(\theta) = (q(\theta), t(\theta))$라고 하자.

대리인 i가 θ_i 유형에서 $\hat{\theta}_i$를 보고할 때의 효용을 다음과 같이 표기한다.

$$U^i(x(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i) \mid \theta_i) = t_i(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i) - C_i(q_i(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i), \theta_i)$$

정의 3(강한 단일교차조건): (i) $\forall i, k$, $\partial^2 C_i(\cdot, \cdot)/\partial\theta_i \partial q_i^k \geq 0$이고, (ii) $K_i = \{l \in K \mid \partial^2 C_i(\cdot, \cdot)/\partial\theta_i \partial q_i^l > 0\}$가 공집합이 아닌 경우 비용함수 $C_i(\cdot, \cdot)$는 '강한 단일교차조건'(single crossing condition)을 만족한다.[3)]

정의 4(비용함수의 강단조성): 배분 규칙을 $x(\theta)$라고 하고 그것의 대리인들에 대한 생산량 배분을 $q(\theta)$라 하자. 이때 i의 비용함수의 유형(θ_i)에 대한 편미분함수인

---

3) 단일교차조건은 정리 3의 조건(ii)를 요구하지 않는다.

$\frac{\partial}{\partial \theta_i} C_i(q_i(\theta_{-i}, s), \theta_i)$가 모든 $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$, $\theta_i \in \Theta_i$, $i \in N$ 에 대하여 s의 강한 단조감소함수이면, 비용함수 $C_i(q_i(\theta), \theta_i)$가 강단조성을 갖는다.

정의 5(대등한 실행): 임의의 사전확률분포 $p \in P$에 대하여 베이즈 유인 일치적 배분 규칙 $x(\theta, p) = (q(\cdot), t(\cdot))$은 다음 조건 (i)과 (ii)를 만족시키면 우월 전략으로 '대등한 실행'(equivalent implementation)을 할 수 있다고 한다.

(i) 직접 메커니즘에서 배분 규칙 $(q(\cdot), \bar{t}_1(\cdot), \ldots, \bar{t}_n(\cdot))$이 우월 전략 균형이 되게 하는 이전지급 $(\bar{t}_1(\cdot), \ldots, \bar{t}_n(\cdot))$ 이 존재하고, (ii) $\forall \theta_i \in \Theta_i$, $\forall i$, $E_{\Theta_{-i}}(t_i(\theta_{-i}, \theta_i, p) - \bar{t}_i(\theta_{-i}, \theta_i, p) \mid p, \theta_i) = 0$.

정의 6(부분실행): 어떤 메커니즘 (M, g)이 존재해서 하나의 균형 전략 σ_e가 존재하여 $g(\sigma_e) = x$를 만족하면, 배분규칙 x가 메커니즘 (M, g)에 의해 '부분실행'(partial implementation) 된다고 한다.

주의: '부분'이라 하는 이유는 이러한 정의에 따를 때 또 다른 균형인 $\sigma_e'(\neq \sigma_e)$이 존재하여 $g(\sigma_e') \neq x$일 수 있기 때문이다. 즉, 주인이 원하지 않는 결과가 메커니즘의 균형으로 나타날 수 있는 가능성이 존재한다. 다음에 정의하는 완전실행 하에서는 이러한 가능성을 배제한다.

정의 7(완전실행): 배분 규칙 x가 메커니즘 (M, g)에 의해 부분실행될 때, $g(\sigma_e) = x$인 균형들 σ_e는 존재하나, $g(\sigma_e') \neq x$인 또 다른 균형 σ_e'은 존재하지 않으면, '완전실행'(full implementation) 된다고 한다.[4)]

정의 8(실질적 실행): 배분규칙 $x = (q, t)$가 다음을 만족하면 '실질적 실행'(virtual implementation)이 된다고 한다. 완전실행 가능한 배분규칙 $x' = (q', t')$이 존재하

4) 게임 g의 균형 결과들의 집합이 배분 규칙과 일치하면 조건이 충족되므로 g가 복수 균형을 갖더라도 균형의 결과들이 배분 규칙과 같은 결과를 주면 완전실행이 된다.

여, 모든 $\epsilon > 0$과 임의의 $\theta \in \Theta$에 대하여 $\|q(\theta) - q'(\theta)\| \leq \epsilon$, $\|t(\theta) - t'(\theta)\| \leq \epsilon$ 이다. 즉, 완전실행 가능한 배분규칙 x'과 배분규칙 x의 생산량할당과 이전지급간의 각각의 유클리드 거리는 모든 상태에 대하여 임의의 근방 내에 있다는 것을 의미한다.

Ⅲ. 우월 전략으로 대등한 실행과 예제

1. 우월 전략으로 대등한 실행

대리인들의 유형에 대한 사전확률분포가 연속분포임을 가정하고 Mookherjee and Reichelstein (1992)은 우월 전략으로 대응한 실행을 할 수 있는 충분조건을 제시하였다. 이제 사전확률분포가 이산분포인 경우 그에 상응하는 충분조건을 도출하면 다음과 같다.

정의 9(생산량의 강단조성): (i) 모든 i, l과 θ_{-i}에 대하여 $q_i^l(\theta_{-i}, \theta_i)$는 θ_i의 단조 감소 함수이고, (ii) 강한 단일교차조건에서 정의한 K_i의 한 원소 k_i가 존재하여 $q_i^{k_i}(\theta_{-i}, \theta_i)$는 θ_i의 강한 단조 감소 함수이면, 생산량이 강단조성을 갖는다고 한다.[5)]

보조정리 1: 비용함수가 강한 단일교차조건(single crossing condition)을 만족하고 생산량이 강단조성을 갖는다면, 비용함수 $C_i(q_i, \theta_i)$는 강단조성을 갖는다.

증명: 정의 4로부터 쉽게 보일 수 있다.

보조정리 2: 다음의 두 개의 최적화 문제 프로그램 Ⅰ(이하 'PⅠ'로 표기함)과 프로그램 Ⅱ(이하 'PⅡ'로 표기함)를 고려하자. PⅠ과 PⅡ는 같은 목적함수를 갖으나 P

5) 생산량의 단조성은 조건(ii)를 요구하지 않는다.

I 의 실행가능 집합은 PⅡ의 그것의 부분집합임을 알 수 있다. 따라서 P I 의 최적값은 PⅡ의 그것 이상이다. 그런데 비용함수가 강한 단일교차조건(single crossing condition)을 만족하고 P I 에서 구한 최적 생산량이 강단조성을 갖는다면, 두 프로그램은 같은 최적해와 최적값을 갖는다.

$$\text{P I}: \quad \max_{q(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_n(\cdot)} \quad E_\Theta\Big(B(q(\theta)) - \sum_{i=1}^{n} t_i(\theta)\Big)$$

$$st.\ E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r \mid \theta_i^r)) \geq 0 \tag{1}$$

$$E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r \mid \theta_i^r)) \geq E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^l \mid \theta_i^r)) \tag{2}$$

단, $r,\ l \in \{1, \ldots, s\},\quad i \in N$

$$\text{P II}: \quad \max_{q(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_n(\cdot)} \quad E_\Theta\Big(B(q(\theta)) - \sum_{i=1}^{n} t_i(\theta)\Big)$$

$$st.\ E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^s \mid \theta_i^s)) \geq 0 \tag{3}$$

$$E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r \mid \theta_i^r)) \geq E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^{r+1} \mid \theta_i^r)) \tag{4}$$

단, $r \in \{1, \ldots, s\},\quad \forall i \in N.$

증명: 부록을 보라.

보조정리 3: 비용함수가 강한 단일교차조건(single crossing condition)을 만족하고 생산량이 강단조성을 갖는다고 하자. 이때 베이즈 유인 일치적인 배분 규칙 $(q(\theta), t(\theta))$을 우월 전략으로 대등하게(equivalently) 부분실행할 수 있다.

증명: 다음과 같이 유형에 따른 이전지급을 설정하면 된다.

$$\bar{t}_i(\theta_{-i}, \theta_i^s) = C_i(q_i(\theta_{-i}, \theta_i^s), \theta_i^s) + \varepsilon_i(\theta_{-i}) \tag{5}$$

$$\bar{t}_i\ (\theta_{-i}, \theta_i^r) = C_i(q_i(\theta_{-i}, \theta_i^r), \theta_i^r) + \sum_{k=r+1}^{s} \{C_i(q_i(\theta_{-i}, \theta_i^k), \theta_i^k) - C_i(q_i(\cdot), \theta_i^{k-1})\} + \varepsilon_i(\theta_{-i}) \tag{6}$$

단, $\forall \theta_{-i}, i, r = 1, \ldots, s-1$

$\varepsilon_i(\theta_{-i})$는 $E_{\theta_{-i}}(\varepsilon_i(\theta_{-i})) = 0$인 임의의 함수임.[6]

대리인들에 대한 기대이전 지급이 $t(\theta)$와 같다는 것은 명백하다.
이제 우월 전략 유인 일치적임을 보이자. 다음의 두 경우로 나누어 볼 수 있다.

(경우 1) $r > l$이면, $U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r \mid \theta_i^r) > U^i(\theta_{-i}, \theta_i^l \mid \theta_i^r)$이다.
보조정리 2의 (i)과 같은 방법으로 보일 수 있다.
(경우 2) $l > r$이면, $U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r \mid \theta_i^r) \geq U^i(\theta_{-i}, \theta_i^l \mid \theta_i^r)$이다(동호는 $l = r+1$일 때 성립).
보조정리 2의 (ii)와 같은 방법으로 보일 수 있다.

2. 예 제

두 개의 생산요소 q_1과 q_2를 사용하여 하나의 생산물 q를 만들어서 판매하는 기업이 있다고 하자. 주인의 생산 함수는 $q = \min\{q_1, q_2\}$이고, 생산에 따른 편익 함수는 $S(q)$(단, $S' > 0, S'' < 0$)이다. 각 생산요소는 독립된 생산 부문(대리인) 1과 2에 의해 생산된다. 또한, 주인은 대리인 i에게 생산의 대가로 t_i를 지급한다고 하자. 또 각 부문의 대리인 $i(=1, 2)$가 생산요소 q_i를 생산하는 데 드는 비용은 $\theta_i q_i$이다. 그런데 평균 비용 θ_i는 확률적으로 두 가지 상태 $\{\underline{\theta}, \overline{\theta}\}$(단, $\underline{\theta} < \overline{\theta}$) 중에서 하나로 실현되는데 ν의 확률로 $\underline{\theta}$가 발생한다. 이때 주인의 최적화 문제는 다음과 같다.

$$\max \nu^2 [S(\min\{q_1(\underline{\theta}, \underline{\theta}), q_2(\underline{\theta}, \underline{\theta})\} - t_1(\underline{\theta}, \underline{\theta}) - t_2(\underline{\theta}, \underline{\theta})]$$

---

6) $\varepsilon_i(\theta_{-i})=0$이면 사후적인 개인 합리성을 충족시키면서 우월 전략으로 대등한 실행을 할 수 있다.

$$+\nu(1-\nu)[S(\min\{q_1(\overline{\theta},\underline{\theta}),q_2(\underline{\theta},\overline{\theta})\}-t_1(\overline{\theta},\underline{\theta})-t_2(\underline{\theta},\overline{\theta})]$$

$$+\nu(1-\nu)[S(\min\{q_1(\underline{\theta},\overline{\theta}),q_2(\overline{\theta},\underline{\theta})\}-t_1(\underline{\theta},\overline{\theta})-t_2(\overline{\theta},\underline{\theta})]$$

$$+(1-\nu)^2[S(\min\{q_1(\overline{\theta},\overline{\theta}),q_2(\overline{\theta},\overline{\theta})\}-t_1(\overline{\theta},\overline{\theta})-t_2(\overline{\theta},\overline{\theta})]$$

$$st.\ \forall i,\ \nu(t_i(\underline{\theta},\underline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\underline{\theta},\underline{\theta}))+(1-\nu)(t_i(\overline{\theta},\underline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\overline{\theta},\underline{\theta}))\geq 0 \qquad (7)$$

$$\nu(t_i(\underline{\theta},\overline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\underline{\theta},\overline{\theta}))+(1-\nu)(t_i(\overline{\theta},\overline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\overline{\theta},\overline{\theta}))\geq 0 \qquad (8)$$

$$\nu(t_i(\underline{\theta},\underline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\underline{\theta},\underline{\theta}))+(1-\nu)(t_i(\overline{\theta},\underline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\overline{\theta},\underline{\theta}))$$
$$\geq\nu(t_i(\underline{\theta},\overline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\underline{\theta},\overline{\theta}))+(1-\nu)(t_i(\overline{\theta},\overline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\overline{\theta},\overline{\theta})) \qquad (9)$$

$$\nu(t_i(\underline{\theta},\overline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\underline{\theta},\overline{\theta}))+(1-\nu)(t_i(\overline{\theta},\overline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\overline{\theta},\overline{\theta}))$$
$$\geq\nu(t_i(\underline{\theta},\underline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\underline{\theta},\underline{\theta}))+(1-\nu)(t_i(\overline{\theta},\underline{\theta})-\underline{\theta}q_i(\overline{\theta},\underline{\theta})) \qquad (10)$$

(7)과 (8)은 각각 $\overline{\theta}$와 $\underline{\theta}$ 유형의 대리인의 개인적 합리성 제약식들이고, (9)와 (10)은 각각 $\overline{\theta}$와 $\underline{\theta}$ 유형의 대리인 i의 유인일치 제약식들이다. 또한 생산함수의 특성에 의하여 비용최소화를 달성하기 위해서는 각각의 상태에 대하여 다음의 관계가 성립해야 한다. 그런데 논의의 편의를 위하여 각각의 상태에 대해 생산량을 $\underline{q}$, $\widehat{q_1}$, $\widehat{q_2}$, $\overline{q}$로 표기한다.

두 대리인이 모두 효율적일 때 $q_1(\underline{\theta},\underline{\theta})=q_2(\underline{\theta},\underline{\theta})\equiv\underline{q}$, 대리인 1만 효율적일 때 $q_1(\overline{\theta},\underline{\theta})=q_2(\underline{\theta},\overline{\theta})\equiv\widehat{q_1}$, 대리인 2만 효율적일 때 $q_1(\underline{\theta},\overline{\theta})=q_2(\overline{\theta},\underline{\theta})\equiv\widehat{q_2}$, 두 대리인 모두 비효율적일 때 $q_1(\overline{\theta},\overline{\theta})=q_2(\overline{\theta},\overline{\theta})\equiv\overline{q}$이라 하자. 보조정리 2에 의하면, 최적에서는 (8)과 (9)가 구속적이다. 따라서 대리인들에 대한 이전지급들을 생산량의 함수로 표시할 수 있다. 이를 목적함수에 대입하여 정리하면 다음의 최적 프로그램을 얻는다.

$$\max\ \nu^2S(\underline{q})+\nu(1-\nu)S(\widehat{q_1})+\nu(1-\nu)S(\widehat{q_2})+(1-\nu)^2S(\overline{q})$$
$$-\nu\{\nu(2\underline{\theta}\,\underline{q}+\Delta\theta\widehat{q_2}+\Delta\theta\widehat{q_2})+(1-\nu)(\underline{\theta}\widehat{q_1}+\underline{\theta}\widehat{q_2}+2\Delta\theta\overline{q})\}$$
$$-(1-\nu)\{\nu\overline{\theta}\widehat{q_1}+\nu\overline{\theta}\widehat{q_2}+2(1-\nu)\overline{\theta}\,\overline{q}\}$$

따라서 다음과 같은 1차 조건을 얻는다:

$$S'(\underline{q}^*) = 2\underline{\theta},$$

$$S'(\hat{q}_i^*) = (\underline{\theta} + \overline{\theta}) + \frac{\nu}{1-\nu}\Delta\theta \text{ 단, } i = 1, 2.$$

$$S'(\overline{q}^*) = 2\overline{\theta} + \frac{2\nu}{1-\nu}\Delta\theta.$$

주의: 차선의 배분은 사전확률분포 ν에 의존한다.

한 명의 대리인만이 효율적일 때의 생산량을 $\hat{q}$라 표기하자. 그런데 $\underline{q} > \hat{q} > \overline{q}$이므로 $q_i(\theta_{-i}, \theta_i)$가 θ_i의 강한 단조 감소 함수임을 알 수 있다. 보조정리 3의 결과를 이용하면 우월 전략으로 대등하게 부분실행할 수 있는 이전지급을 찾을 수 있다.

$$t_i(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = \underline{\theta} q_i(\underline{\theta}, \underline{\theta}) + \Delta\theta q_i(\underline{\theta}, \overline{\theta}) + \varepsilon_i(\underline{\theta}) = \underline{\theta}\,\underline{q} + \Delta\theta\hat{q} + \varepsilon_i(\underline{\theta})$$

$$t_i(\overline{\theta}, \underline{\theta}) = \underline{\theta} q_i(\overline{\theta}, \overline{\theta}) + \Delta\theta q_i(\overline{\theta}, \underline{\theta}) + \varepsilon_i(\overline{\theta}) = \underline{\theta}\,\underline{q} + \Delta\theta\hat{q} + \varepsilon_i(\overline{\theta})$$

$$t_i(\underline{\theta}, \overline{\theta}) = \overline{\theta} q_i(\underline{\theta}, \overline{\theta}) + \varepsilon_i(\underline{\theta}) = \overline{\theta}\hat{q} + \varepsilon_i(\underline{\theta})$$

$$t_i(\overline{\theta}, \overline{\theta}) = \overline{\theta} q_i(\overline{\theta}, \overline{\theta}) + \varepsilon_i(\overline{\theta})$$

$$\nu\varepsilon_i(\underline{\theta}) + (1-\nu)\varepsilon_i(\overline{\theta}) = 0$$

그런데 1차 조건에서 보면 한 명의 대리인만이 효율적인 상태에서 두 대리인 모두에게 동일한 생산량이 할당된다. 만약 대리인들이 효율성 여부에 관계없이 동일한 량을 생산할 때는 동일한 이전지급을 받아야 한다는 '익명성의 가정' 즉, " $q_i(\underline{\theta}, \overline{\theta}) = q_i(\overline{\theta}, \underline{\theta}) = \hat{q}$이면, $t_i(\underline{\theta}, \overline{\theta}) = t_i(\overline{\theta}, \underline{\theta})$이다"라고 가정하면 다음의 이전 지급을 얻을 수 있다.

$$t_i(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = \underline{\theta}\,\underline{q} + \nu\Delta\theta\hat{q} + (1-\nu)\Delta\theta\overline{q}$$

$$t_i(\underline{\theta}, \overline{\theta}) = t_i(\overline{\theta}, \underline{\theta}) = \underline{\theta}\hat{q} + \nu\Delta\theta\hat{q} + (1-\nu)\Delta\theta\overline{q}$$

$$t_i(\overline{\theta}, \overline{\theta}) = \overline{\theta}\,\overline{q} + \nu \Delta\theta(\hat{q} - \overline{q})$$

대리인들이 자신의 유형을 메시지로 보고하고 이에 따라 주인은 전술한 생산량과 이전지급을 할당한다고 하자. 이때 대리인 i가 각각의 상태에서 m_i라는 메시지를 보낼 때 효용은 다른 대리인이 보내는 메시지 m_j에 의존하는데, 이를 〈표 1〉과 〈표 2〉로 나타낼 수 있다.

〈표 1〉에서 $\underline{\theta}$ 유형의 대리인 i가 어떤 메시지를 보고하더라도 상대방의 전략에 관계없이 동일한 효용을 얻는다는 것을 알 수 있다. 따라서 대리인들이 $\underline{\theta}$의 상태에서는 $\underline{\theta}$를 보고하는 것뿐만 아니라 $\overline{\theta}$를 보고하는 것도 우월 전략임을 쉽게 알 수 있다. 그리고 〈표 2〉에서 대리인들은 $\overline{\theta}$의 상태에서는 $\overline{\theta}$를 보고하는 것만이 우월 전략임을 알 수 있다. 따라서 우월 전략으로 실행하더라도 복수 균형의 문제가 발생한다. 또한 대리인들이 자신의 상태에 관계없이 $\overline{\theta}$를 보고하는 것은, 그들의 입장에서 볼 때 파레토 우월한 배분임을 알 수 있다. 그러므로 이러한 주인이 원하지 않는 균형을 제거하는 것이 문제이다.7)

그런데 대리인들은 평균 비용이 낮은 수준인 $\underline{\theta}$에서 높은 수준 $\overline{\theta}$라고 허위 보고하는 것은 최적 반응이 되나 평균 비용이 높은 수준 $\overline{\theta}$에서 낮은 수준 $\underline{\theta}$라고 허위 보고하는 것은 최적 반응이 될 수 없음을 알 수 있다. 이러한 성질을 이용할 때 대리인 i가 허위 보고하는 균형이 존재하면, 유형에 관계없이 항상 $\overline{\theta}$라고 보고하는 것이다. 이때 대리인 i가 $\overline{\theta}$를 보고할 확률은 '1'이므로 그가 $\overline{\theta}$의 유형일 사전확률인 $(1-\nu)$와는 달라진다. 따라서 대리인들이 허위 보고를 하는 경우의 사전확률 분포의 역전(reversal)을 이용하여 메커니즘을 설계하면 거짓을 보고하는 균형을 제거할 수 있다. 또한 가능한 사전확률분포 집합 P의 임의의 원소 p가 확산되어(diffuse) 있다고 하자. 이때 균형에서 대리인 i가 $\overline{\theta}$를 보고할 확률은 '1'이므로 가

---

7) 대리인들이 상태에 관계없이 $\overline{\theta}$라고 항상 보고하면 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$와 $(\overline{\theta}, \underline{\theta})$의 상태에서 대리인들의 효용의 합은 $2\overline{t}-(\underline{\theta}+\overline{\theta})\overline{q}$이다. 그런데 진실을 보고하면 그들의 효용의 합은 $2\hat{t}-(\underline{\theta}+\overline{\theta})\hat{q}$이다. 그런데 $2\overline{t}-(\underline{\theta}+\overline{\theta})\overline{q}-\{2\hat{t}-(\underline{\theta}+\overline{\theta})\hat{q}\}=\Delta\theta(\hat{q}-\overline{q})>0$이고, 다른 상태에서는 두 전략에서 얻을 수 있는 효용의 합이 같음을 쉽게 알 수 있다. 따라서 대리인들이 상태에 관계없이 $\overline{\theta}$라고 항상 보고하는 것이 진실을 말하는 것보다 파레토 우월한 균형임을 알 수 있다.

〈표 1〉 $\underline{\theta}$ 유형의 대리인 i의 메시지에 따른 효용

		m_j	
		$\underline{\theta}$	$\overline{\theta}$
m_i	$\underline{\theta}$	$\nu\Delta\theta\hat{q}+(1-\nu)\Delta\theta\overline{q}$	$\nu\Delta\theta\hat{q}+(1-\nu)\Delta\theta\overline{q}$
	$\overline{\theta}$	$\nu\Delta\theta\hat{q}+(1-\nu)\Delta\theta\overline{q}$	$\nu\Delta\theta\hat{q}+(1-\nu)\Delta\theta\overline{q}$

〈표 2〉 $\overline{\theta}$ 유형의 대리인 i의 메시지에 따른 효용

		m_j	
		$\underline{\theta}$	$\overline{\theta}$
m_i	$\underline{\theta}$	$-\nu\Delta\theta(\underline{q}-\hat{q})-(1-\nu)\Delta\theta(\underline{q}-\overline{q})$	$-(1-\nu)\Delta\theta(\hat{q}-\overline{q})$
	$\overline{\theta}$	$-(1-\nu)\Delta\theta(\hat{q}-\overline{q})$	$\nu\Delta\theta(\hat{q}-\overline{q})$

능한 사전확률분포의 임의의 원소와 다른 분포를 보인다. 이러한 성질을 이용하면 주인이 대리인들의 사전확률분포에 대하여 불확실성을 갖는 경우에도 원하지 않는 균형을 제거하여 완전실행할 수 있음을 보일 수 있다.

Ⅳ. 주요 결과

1. 베이즈 메커니즘의 완전실행

본 항에서는 사전확률분포 p가 주인과 대리인들의 공통지식이라고 가정하고, 베이즈 메커니즘의 완전실행 문제에 대해 살펴본다. 주요 정리를 증명하기에 앞서 다음의 보조정리들을 살펴보자.

보조정리 4: 우월 전략 유인 일치적인 직접 메커니즘에서 대리인들이 참된 유형을 보고하지 않는 우월 전략 균형이 있다면 혼성균형(pooling equilibrium)이다.

증명: 참된 유형을 보고하지 않는 우월 전략 균형 σ가 혼성균형이 아니라고 하자. 이때 σ는 참된 유형을 보고하는 균형이 아니므로 $\sigma_i(\theta_i^r)=\theta_i^l$ (단, $r\neq l$)인

어떤 대리인 i가 존재한다. 일반성을 잃지 않고 $1<r<s-1$이라고 하자. $r>l$이면, 보조정리 3의 (경우 1)의 증명에 의하여 $U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r \mid \theta_i^r) > U^i(\theta_{-i}, \theta_i^l \mid \theta_i^r)$이다. 따라서 자신의 유형보다 낮은 유형을 보고하는 것은 우월 전략 균형이 될 수 없다. $r+1<l$ 이면, 보조정리 3의 (경우 2)에 의하여 마찬가지로 우월 전략 균형이 될 수 없다. 따라서 자신의 유형보다 두 단계를 올려서 보고하는 것도 균형이 될 수 없다. 결국 보조정리 3에 의하여 $l=r+1$이다. 즉, 다른 유형을 보고하는 최적 전략이 있다면, 그것은 자신의 유형보다 한 단계를 올려서 보고하는 것이다. 그런데 θ_i^{r+1}유형이 참된 유형을 보고하면 θ_i^{r+1}을 보고하는 유형이 θ_i^r과 θ_i^{r+1}이 된다. 따라서 혼성균형이 되므로 σ에서는 θ_i^{r+1}도 자신의 유형보다 한 단계를 올려서 보고해야 한다. 만약 $r+1=s$이면 θ_i^s가 다른 유형을 보고하는 것은 최적 반응이 될 수 없다. 결국 i의 유형 θ_i^{s-1}과 θ_i^s에서 θ_i^s를 보고하게 된다. 따라서 혼성균형이 되므로 모순이 된다. 만약, $r+1<s$이면, θ_i^r에서와 같이 혼성균형이 되지 않기 위해서는 θ_i^{r+1}이 θ_i^{r+2}를 보고할 수밖에 없다. 이와 같이 살펴보면 가능한 유형의 수인 s가 유한(finite)하므로 결국 혼성균형이 될 수밖에 없고 모순이 된다.

정의 7(속임 함수): $\alpha_i: \Theta_i \to \Theta_i$ 는 속임 함수(deception function)라고 하고,[8] $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$이다. 또한, $p(\alpha^{-1}(\theta)) = p(\{\tau \mid \alpha(\tau)=\theta\})$라 정의한다. 이는 $\alpha(\cdot)$라는 속임 함수 또는 대리인들의 전략 σ가 주어졌을 때 대리인들이 θ를 보고할 확률을 말한다.[9]

보조정리 5: 베이즈 유인 일치적인 배분 규칙 $(q(\theta), t(\theta))$을 우월 전략으로 대등하게(equivalently) 부분실행할 수 있을 때, 그러한 메커니즘에서 대리인들이 참된 유형을 보고하지 않는 베이즈 내쉬 균형 σ가 있다면 혼성균형(pooling equilibrium)이다.

---

8) 속임 함수의 치역이 가능한 유형들의 집합임을 주의하라. 즉, 혼합 전략을 고려하지 않고 순수 전략만을 고려한다. Jackson(1991)은 "이러한 제한이 실행 문헌들에서 일반적이다"라고 하고 있다.

9) $p(\{\tau \mid \sigma(\tau)=\theta\}) = p(\alpha^{-1}(\theta))$이다.

증명: 참된 유형을 보고하지 않는 베이즈 내쉬 균형 σ가 혼성균형이 아니라고 하자. σ는 참된 유형을 보고하는 균형이 아니므로 어떤 대리인 i가 존재하여 $\sigma_i(\theta_i^r)=\theta_i^l$ (단, $r\neq l$)이다. 이때 θ_i^r에서 θ_i^l이 최적 반응이다. 따라서 σ_{-i}에 대응하는 속임 함수를 α_{-i}^{-1}라고 할 때 다음이 성립한다.

$$E\{U^i(\theta_{-i},\theta_i^l \mid \theta_i^r) \mid p(\alpha_{-i}^{-1}(\theta_{-i})\} \geq E\{U^i(\theta_{-i},\theta_i \mid \theta_i^r) \mid p(\alpha_{-i}^{-1}(\theta_{-i})\} \quad \forall \theta_i.$$

이는 다음의 사실을 함의한다.

어떤 $\theta_i^l \in \Theta_i$에 대하여 $U^i(\theta_{-i},\theta_i^l \mid \theta_i^r) \geq U^i(\theta_{-i},\theta_i^r \mid \theta_i^r)$이다.

일반성을 잃지 않고 $1<r<s-1$이라고 하자. $r>l$이면, 보조정리 3의 (경우 1)에 의하여 모든 θ_i^l에 대하여 $U^i(\theta_{-i},\theta_i^r \mid \theta_i^r) > U^i(\theta_{-i},\theta_i^l \mid \theta_i^r)$이다. 따라서 $r>l$인 경우는 없다. 비슷한 방법으로 보조정리 3의 (경우 2)에 의하여 $l>r+1$일 수도 없음을 보일 수 있다. 따라서 $l=r+1$이다. 이와 같이 진행하면 유형의 수가 유한하므로 혼성균형일 수밖에 없으므로 모순이 된다.

주의: 혼합전략을 고려한 베이즈 내쉬 균형에서도 참된 유형을 보고하지 않는 균형에서 실현된 유형에 대한 확률분포는 사전확률분포와 다름을 쉽게 알 수 있다.

사전확률분포가 연속 분포인 경우에는 Mookherjee and Reichelstein (1992) 에 의하면 다음의 정리 1을 얻는다.

정리 1(Mookherjee and Reichelstein(1992)): 대리인의 수가 2명 이상인 경제에서 다음의 가정을 한다: (i) 사전확률분포 p가 주인과 대리인(들)의 공통지식(common knowledge)이다. (ii) 비용함수가 단일교차조건을 만족한다. (iii) 생산량이 단조성을 갖는다. 이때 베이즈 유인 일치적인 배분 규칙 $x(\theta,p)$는 우월 전략으로 대등하게 부분실행할 수 있다.

사전확률분포가 연속 분포인 경우 Mookherjee and Reichelstein (1992) 은 베이즈 유인 일치적인 배분 규칙을 우월전략으로 대등하게 실행하는 경우에 복수의 우월 전략 균형을 가질 수 있음을 지적하였다. 그런데 그들은 이러한 경우에도 대등한 실행에서 갖게되는 모든 우월 전략 균형들에서 이전 지급과 생산량이 희망하는 자원 배분과 일치하는 충분조건을 보였다.[10] 다음의 정리는 이산 분포를 가정할 때 베이즈 내쉬 균형개념으로 완전실행할 수 있는 충분조건을 보여준다.

정리 2: 대리인의 수가 2명 이상인 경제에서 다음의 가정을 한다: (i) 사전확률분포 p가 주인과 대리인(들)의 공통지식(common knowledge)이다. (ii) 비용함수가 강한 단일교차조건(single crossing condition)을 만족한다. (iii) 생산량이 강단조성을 갖는다. 이때 주인은 베이즈 유인 일치적 배분규칙 $x(\theta, p)=(q(\theta, p), t(\theta, p))$을 베이즈 내쉬 균형개념으로 대등하게 완전실행할 수 있다.

증명: 보조정리 3에 의하여 베이즈 유인 일치적인 배분 규칙 $x(\theta)$을 우월 전략으로 대등하게(equivalently) (그러나 부분) 실행할 수 있다. 편의상 이를 $(q(\theta), t(\theta))$ 라고 하자. 다음과 같은 메커니즘을 고려해 보자.[11] 각 대리인 i 에 대하여 다음의 메시지 공간 M^i 를 정의한다.

$$M^i = M_1^i \times M_2^i$$

단, $M_1^i = \Theta_i$

$$M_2^i = W_i \cup 0$$

$$W_i = \left\{ w : \Theta_{-i} \to R^n \mid \sum_{k=1}^{n} w_k(\theta_{-i}) = 0 \ \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}, \ \sum_{\theta_{-i}} p(\theta_{-i}) w_i(\theta_{-i}) < 0 \right\}$$

각 대리인 i는 $m^i = (m_1^i, m_2^i)$를 보고한다.

---

10) 그들은 이러한 때 우월 전략으로 유일하게(uniquely) 실행된다고 정의했다.

11) 일반적으로 실행이론에서 정리를 증명하는 방법은 다음과 같다. 아주 일반적인 하나의 메커니즘(또는 게임형태)을 정의한 후, 그 메커니즘이 정리의 가정을 만족하는 배분규칙을 실행함을 보이는 것이다. 이에 대한 자세한 논의는 Palfrey (2000) 를 보라.

단, $m=(m^1, \ldots, m^n)$이다.

m_2^i 는 i가 다른 대리인들에게 제시하는 그들의 유형에 의존하는 이전지급들 또는 '0'을 보내는 것 중에 하나를 선택하는 것이다. 이때 이전 지급이 충족해야될 조건은 균형 예산과 다른 대리인들이 모두 진실된 상황을 보고한다면 자신의 기대 이익이 음수가 되게 해야한다는 것이다.

보고에 따른 결과함수 g(m)은 다음과 같다.

$m^i=(\theta_i, 0)$ $\forall i$이면, $g(m)=x(\theta)$

그렇지 않으면, $g(m)=x(\theta)+(0, w_i)$ 단, $i=\min\{k\in N \mid m_2^k\neq 0\}$임

위의 메커니즘에서 $m^i=(\theta_i, 0)$ $\forall i$가 유일한 베이즈 내쉬 균형임을 보이자. 증명은 두 단계로 이루어진다. 단계 1에서는 $m^i=(\theta_i, 0)$ $\forall i$ 가 베이즈 내쉬 균형임을 보인다. 단계 2에서는 베이즈 내쉬 균형의 필요조건을 구하고 단계 1에서 구한 것이 이러한 조건을 만족하는 유일한 베이즈 내쉬 균형임을 보인다.

단계 1) $(\theta_i, 0)$ $\forall i$가 베이즈 내쉬 균형이다.

대리인 j가 이탈하여 $m_2^j\neq 0$을 보고한다면 W_j의 조건을 충족해야 하므로 $\sum_{\theta_{-j}} p(\theta_{-j})w_j(\theta_{-j})<0$이다. 결국 '0'를 보고하는 것보다 나빠진다. 따라서 '0'를 보고하는 것만이 최적 반응이다. j가 이탈하여 θ_j^r에서 θ_j^l을 보고한다면 θ_j^r를 보고하는 것이 우월 전략이므로 더 좋아질 수 없다.

단계 2) $m^i=(\theta_i, 0)\forall i\in N$이외의 다른 베이즈 내쉬 균형은 없음을 두 단계로 나누어 보자.

(1) 베이즈 내쉬 균형에서 $m_2^i=0$ $\forall i$이다.

균형에서 어떤 사람(들)이 $m_2^k\neq 0$을 보고했다고 하자. 대리인들이 유형을 보고

하는 균형전략 σ에서 유도된 속임 함수를 α^{-1}라고 하자. w는 $m_3^k \neq 0$를 보고한 대리인들 중에 가장 작은 번호를 갖는 대리인 j가 보고한 것이라면, 다음 중에 하나가 성립한다:

$$\sum_{\theta_{-j}} p(\alpha_{-j}^{-1}(\theta_{-j}))w_j(\theta_{-j}) > 0$$

$$\sum_{\theta_{-j}} p(\alpha_{-j}^{-1}(\theta_{-j}))w_j(\theta_{-j}) < 0$$

$$\sum_{\theta_{-j}} p(\alpha_{-j}^{-1}(\theta_{-j}))w_j(\theta_{-j}) = 0$$

첫 번째 경우에는 kw_j(단, $k>1$)를 주장함으로써 j는 효용을 증가시킬 수 있다. 따라서 균형이라는 것에 모순이 된다.

두 번째 경우에는 kw_j(단, $k<1$)를 주장함으로써 j는 효용을 증가시킬 수 있다. 따라서 모순이 된다.

세 번째 경우에는 다음의 경우들로 나누어 볼 수 있다.

(경우 1) $p(\theta_{-j}) = p(\alpha_{-j}^{-1}(\theta_{-j}))$라 하면, 이는 다음을 함의한다:

$\sum_{\theta_{-j}} p(\theta_{-j})w_j(\theta_{-j}) = \sum_{\theta_{-j}} p(\alpha_{-j}^{-1}(\theta_{-j}))w_j(\theta_{-j}) = 0$이다.

그런데 $m_3^j \neq 0$이므로 W_j의 조건을 충족시켜야 한다. 이는 다음을 함의한다:

$\sum_{\theta_{-j}} p(\theta_{-j})w_j(\theta_{-j}) < 0$이다. 따라서 모순이다.

(경우 2) $p(\theta_{-j}) \neq p(\alpha_{-j}^{-1}(\theta_{-j}))$라 하자. 이때 다음의 조건을 만족하는 $\widehat{w}_j(\theta_{-j})$를 찾을 수 있다.

$$\sum_{\theta_{-j}} p(\theta_{-j})\widehat{w}_j(\theta_{-j}) < 0,$$

$$\sum_{\theta_{-j}} p(\alpha_{-j}^{-1}(\theta_{-j}))\widehat{w}_j(\theta_{-j}) > 0.$$

그러므로 j는 w_j대신에 $\widehat{w}_j$를 보고함으로써 효용을 증가시킬 수 있다. 따라서 모순이다.

(2) 베이즈 내쉬 균형에서 $\sigma(\theta)=\theta$이다.

어떤 대리인 i가 거짓을 보고하는 베이즈 내쉬 균형을 $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$라고 하자. 즉, 어떤 i와 θ_i가 존재하여 그의 균형 전략이 $(\sigma_i, 0)$일 때, $\sigma_i(\theta_i^r)=\theta_i^l$(단, $r\neq l$)이다. 이때 보조정리 6에 의하여 베이즈 내쉬 균형 σ는 혼성균형이 된다. 그런데 사전확률분포는 분산적이므로 $p(\alpha_{-j}^{-1}(\theta_{-j}))\neq p(\theta_{-j})$이다. 따라서 어떤 대리인 j가 다음을 만족하는 $w_j(\theta_{-j})$를 찾을 수 있다.

$$\sum_{\theta_{-j}} p(\theta_{-j})w_j(\theta_{-j})<0$$

$$\sum_{\theta_{-j}} p(\alpha_{-j}^{-1}(\theta_{-j}))w_j(\theta_{-j})>0$$

그러므로 j는 이탈한다. 따라서 모순이다.

Mookherjee and Reichelstein (1992)에 의하면 연속분포를 가정하는 경우 정리 2의 조건들이 직접(direct) 메커니즘에서 강한 우월 전략으로 대등하게 완전실행하는 충분조건임을 알 수 있다. 그러나 이산분포의 경우에는 정리 2의 조건들이 충족되더라도 제Ⅲ절의 예제에서 볼 수 있듯이 직접 메커니즘에서 우월 전략 균형개념으로 완전실행할 수 없었다. 그런데 대리인들의 유형만을 보고하는 직접 메커니즘보다 메시지 공간을 확장한 간접 메커니즘을 도입하면 베이즈 내쉬 균형개념으로 완전실행할 수 있음을 보였다. 이와 관련하여 Palfrey와 Srivastava (1993)는 정리 2의 메커니즘을 이용하여 사전확률분포가 공통지식인 경우 베이즈 유인 일치적인 배분규칙은 대리인들이 거짓을 말할 때는 실현된 유형의 분포가 항상 실제 유형들의 분포와 다르게 된다는 "비일관적 속임"(No Consistent Deception Condition)이 충족될 때 완전실행할 수 있음을 보였다. 그런데 정리 2에서는 사전확률분포가 비일관적 속임을 충족하지 않더라도 확산되어 있기만 하면, 베이즈 유인 일치적 배분규칙을 베이즈 내쉬 균형개념으로 대등하게 완전실행할 수 있음을 보였다.

2. 완전실행 (full implementation)

사전확률분포가 p로 주어져 있고 다른 대리인들이 유형을 θ_{-j}라 보고한다고 하

자. 이때 대리인 i가 유형이 θ_i 이고 사전확률분포가 p로 실현되었을 때 유형을 $\widehat{\theta}_i$라 보고하고 자원 배분에 이용되는 사전확률분포가 $\hat{p}$라 하자. 이때 대리인 i의 효용은 다음과 같이 나타낸다.

$$U^i(\theta_{-i},\ \widehat{\theta}_i, \hat{p} \mid \theta_i) = t_i(\theta_{-i},\ \widehat{\theta}_i, \hat{p}) - C_i(q_i(\theta_{-i}, \widehat{\theta}_i, \hat{p}), \theta_i)$$

이때 배분규칙은 예제에서 본 것처럼 사전확률분포에 의존함을 알 수 있다. 그런데 주인이 사전확률분포 p에 대하여 알지 못하더라도 가능한 사전확률분포 집합에 대해 정리 2의 가정들을 만족할 때 베이즈 유인 일치적인 배분 규칙 $x(\theta, p)$는 다음과 같은 메커니즘으로 우월 전략으로 대등하게 부분실행할 수 있음을 알 수 있다. 1단계에서 대리인들이 사전확률을 보고하게 한다. 이때 모든 대리인들간에 합의가 있는 경우 2단계로 간다. 만약, 합의가 이루어지지 않은 경우 대리인들에게 큰 벌금을 부과한다. 2단계에서는 주인은 합의된 사전확률 p에 의하여 $x(\theta, p)$를 우월 전략으로 대등하게 실행하는 배분 규칙 $\bar{x}(\cdot)$를 대리인들에게 실행한다고 공약한다. 그리고 대리인들은 자신의 유형을 비공개로 보고한다. 이러한 메커니즘에서는 모든 대리인들이 진실된 사전확률분포를 보고하는 것도 균형이지만, 그들이 하나의 일치된 거짓 사전확률분포를 보고하는 것도 균형이 된다. 따라서 주인이 사전확률분포에 대하여 알지 못하는 경우에도 어떤 조건 하에서 주인이 이러한 원하지 않는 균형을 제거하고 배분규칙을 베이즈 내쉬 균형개념으로 대등하게 완전실행할 수 있는지를 살펴보는 것이 필요하다.

정리 3: 대리인들의 수가 3명 이상인 경제에서 다음을 가정한다: (1) 주인은 실현된 사전확률분포 p를 알지 못하나, 그것이 확산되어(diffuse) 있고, 유형들이 취하는 가능한 사전확률분포에 대한 유한 집합 P를 알고 있다고 하자. (2) 비용함수가 단일 교차 조건(single crossing condition)을 만족하고 생산량이 강단조성을 갖는다. 이때 주인은 베이즈 유인 일치적인 배분 $x(\theta, p) = (q(\theta, p), t(\theta, p))$를 베이즈 내쉬 균형으로 대등하게 완전실행할 수 있다.

증명: 보조정리 3에 의하여 베이즈 유인 일치적인 배분 규칙 $x(\theta)$을 우월 전략으로 대등하게(equivalently) 부분실행할 수 있다. 편의상 이를 $(q(\theta), t(\theta))$라고 하자. 이때 다음과 같은 메커니즘 (M, g)를 고려하자.

본 메커니즘에서 대리인들은 순차적으로(sequentially) 두 단계로 나누어 메시지를 보고한다.

1단계: 대리인들(i)은 실현된 사전확률분포($m_1^i \in M_1^i$)를 주인에게 보고하고 그 보고는 공개된다.

2단계: 이러한 정보를 얻은 후에 주인에게 자신의 유형($m_2^i \in M_2^i$)과 $m_3^i \in M_3^i$를 보고한다. m_3^i는 i가 다른 대리인들에게 제시하는 그들의 유형에 의존하는 이전지급들 또는 '0'을 보내는 것 중에 하나를 선택하는 것이다. 이때 이전 지급이 충족해야될 조건은 균형 예산과 다른 대리인들이 모두 진실된 상황을 보고한다면 자신의 기대 이익이 음수가 되게 해야 한다는 것이다. 따라서 각 대리인 i에 대하여 메시지 공간 M^i는 다음과 같이 정의된다.

$M^i = M_1^i \times M_2^i \times M_3^i$이고,

$M_1^i = P$,

$M_2^i = \Theta_i$,

$M_3^i = W_i \cup 0$, 여기서 W_i는 다음과 같다.

$$W_i = \left\{ w : \Theta_{-i} \rightarrow R^n \mid \sum_{k=1}^{n} w_k(\theta_{-i}) = 0 \ \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}, \ \sum_{\theta_{-i}} p^*(\theta_{-i}) w_i(\theta_{-i}) < 0 \right\}$$

단, $w(\theta_{-i}) = (w_1(\cdot), \ldots, w_n(\cdot))$이고,

$p^*(\theta_{-i})$는 적어도 (n-1)명의 대리인들이 i에 대해 동일한 사전확률을 보고한 경우에는 그것을 사용해야 하고, 그렇지 않은 경우에는 i에 대해 보고된 조건부 확률 분포 중 임의의 것을 사용할 수 있다.

$\sigma_t^i\,(t=1,2)$를 대리인 i의 t단계에서 전략이라 하면, 이때 대리인 i의 전략은 1단계에서의 전략 σ_1^i과 2단계에서의 전략 σ_2^i의 쌍인 (σ_1^i, σ_2^i)로 표시된다. σ_t^i

($t=1,2$) 는 다음에 표기하는 바와 같이 역사(history)에 의존하는 함수이다.[12]

σ_1^i : $\Theta_i \times P \rightarrow M_1^i$이고, σ_2^i : $\sigma_1 \times \Theta_i \times P \rightarrow M_2^i \times M_3^i$이다.

각 대리인 i가 $m^i=(m_1^i, m_2^i, m_3^i)$를 보고한다고 할 때, 이 보고에 따른 결과함수 $g(m)$은 다음과 같다.

메시지 공간 M을 다음과 같이 D^1, D^2, D^3, D^4로 분할하자.[13]

$D^1=\{m \mid m_1^j=m_1^i, m_3^i=0, \forall i, j\in N\}$이면, $g(m)=x(m_2, m_1^i)$를 분배한다.

$D^2=\{m \mid m_1^j \neq m_1^i, m_1^i=m_1^k, \forall i, k\neq j$이고, $m_3^i=0 \;\forall i\}$이면,

$g(m)=x(m_2, m_1^i)$를 분배해준다.

$D^3=\{m \mid \exists k \text{ s.t. } m_3^k \neq 0\}$이면, $m_3^k \neq 0$인 것을 보고한 대리인(들) 중에서 가장 작은 번호를 갖는 대리인 j가 주장하는 m_3^j와 그가 주장하는 사전확률 m_1^j에 따라 $g(m)=x(m_2, m_1^j)+(0, m_3(m_2^{-j}))$을 분배해준다.

$D^4=\{m \mid m \notin D^1 \cup D^2 \cup D^3\}$에는 가장 낮은 지수의 대리인 j가 주장하는 사전확률 m_1^j에 따라 $g(m)=x(m_2, m_1^j)$을 분배해준다.

사전확률이 p로 실현되고 임의의 베이즈 내쉬 전략들 $m=(\sigma_1, \sigma_2)=\sigma$이 주어졌을 때 이러한 전략에서 유도된 보고하에서 θ_{-i}가 나타날 확률 $p(a_{-i}^{-1}(\theta_{-i}))$은 다음과 같다.

$$p(a_{-i}^{-1}(\theta_{-i}))=p(\{\tau_{-i} \mid m_2^{-i}(\tau_{-i}, \sigma_1)=\theta_{-i}\})$$

이러한 메커니즘이 주어졌을 때 참된 사전확률이 p라고 할 때 $x(\theta, p)$를 실행할 수 있는 지를 보이자. 증명은 1단계에서 $m^i=(p, \theta_i, 0)$ $\forall i\in N$ 가 베이즈 내쉬균형임을 보이고, 2단계에서 대리인들이 어떤 다른 메시지를 보내는 것은 베이즈 내쉬균형이 될 수 없음을 보임으로써 끝나게 된다.

---

12) 이하의 논의에서 특별한 언급이 없는 한 속임 함수와 마찬가지로 대리인들의 전략의 치역도 순수전략(pure action)들의 집합이다.

13) 게임은 순차적으로 진행되지만 논의의 편의상 결과함수는 동시적인 게임과 같이 표기하였다.

단계 1) $m^i=(p, \theta_i, 0)$ $\forall i\in N$가 베이즈 내쉬 균형임을 보이자.

중간 단계에서 $e=(\theta, p)$가 실현되었다고 하자. $m^i=(p, \theta_i, 0)$ $\forall i\neq j\in N$일 때 j의 최적 반응은 $m^j=(p, \theta_j, 0)$을 보고하는 것임을 보이자. 어떤 대리인 j전략에서 이탈하였다고 하자. $m_3^j\neq 0$를 보고한다고 하자. 그리고, j가 1 단계에서 보고한 사전확률을 σ_j^1이라 하자. 또한, 2 단계에서 보고한 유형을 $m_2^j(\theta_j, \sigma^1)$라고 하자. 이 때 대리인들의 메시지 m은 D^3에 속하고 그때 자원배분에 사용되는 사전확률은 다른 대리인들이 보고한 p이다.[14] 결국, 주인은 $x((\theta_{-j}, m_1^j(\cdot), p))$를 실행한다. 그런데 j가 $m_3^j\neq 0$는 W_j의 조건을 충족시켜야하므로 다음의 조건을 만족시키는 이전지출을 제시해야 한다.[15]

$$0>\sum_{\theta_{-j}} p(\theta_{-j})w_j(\theta_{-j}) \tag{11}$$

그리고 $x(\cdot)$는 유인 일치적이므로 다음의 식이 성립한다:

$$\begin{aligned}&\sum_{\theta_{-j}} p(\theta_{-j})U_j(x((\theta_{-j}, \theta_j), p), \theta_j)\\ \geq &\sum_{\theta_{-j}} p(\theta_{-j})U_j(x((\theta_{-j}, m_2^j(\theta_1, \sigma_1)), p), \theta_j)\end{aligned} \tag{12}$$

(11)과 (12)에서 게임의 2단계에서 $\sigma_2^j=(\theta_j, 0)$를 보고할 때의 대리인 j의 효용은 다른 전략을 사용할 때의 효용보다 크다는 것을 알 수 있다. 따라서 2단계에서 $\sigma_2^j=(\theta_j, 0)$를 보고하는 것이 최적 반응이다.

단계 2) $m^i=(p, \theta_i, 0)$ $\forall i\in N$ 이외의 다른 베이즈 내쉬 균형은 없음을 3단계로 나누어 보이자.

14) 대리인 j가 다른 사전확률을 보고할 수 있으나 이는 배분에 영향을 주지 않는다.

15) 다른 대리인들이 모두 진실을 보고한다는 사실에 유의하여야 한다.

1) 모든 베이즈 내쉬 균형들에서 $m_3^i = 0 \quad \forall i$ 이다.

정리 2의 1)과 같은 방법으로 증명하면 된다.

2) 베이즈 내쉬 균형에서 $m_2^i(\theta_i, \sigma_1) = \theta_i \quad \forall i, \sigma_1$이다.[16)]

어떤 i, σ_1, θ가 존재하여 $m_2^i(\theta_i^r, \sigma_1) = \theta_i^l$(단, $r \neq l$)인 베이즈 내쉬 균형 m^*가 있다고 하자. 이때 m^*는 혼성균형임을 보이자. 혼성균형이 아니라고 하자. 우월 전략으로 $x(\theta, p) \quad \forall \hat{p} \in \mathrm{P}$가 실행되므로 다음이 성립한다.

$$U^i(\hat{\theta}_{-i}, \theta_i^r, \hat{p} \mid \theta_i^r) \geq U^i(\hat{\theta}_{-i}, \theta_i^l, \hat{p} \mid \theta_i^r) \ \forall \hat{p},\ \hat{\theta}_{-i}$$

(단, 등호는 $l = r+1$일 때만 성립함).

따라서 $\hat{p}(;\theta)$를 자원배분에 사용되는 사전확률분포라 하고, 다른 대리인들이 사용하는 전략들에 의하여 유도된 조건부 사전확률분포인 $p(\alpha_{-i}^{-1}(\theta_{-i}))$로 기대효용을 구하면 다음의 관계가 성립한다.

$$E\{U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r, \hat{p}(;\theta) \mid \theta_i^r) \mid p(\alpha_{-i}^{-1}(\cdot))\} \geq E\{U^i(\theta_{-i}, \theta_i^l, \hat{p}(;\theta) \mid \theta_i^r) \mid p(\alpha_{-i}^{-1}(\cdot))\}$$

그러므로 $l \neq r+1$이 아니라면, 위의 관계가 강 부등호로 성립하므로 $m_2^i(\theta_i^r, \sigma_1) = \theta_i^l$이 베이즈 내쉬 균형이라는데 모순이 된다. 따라서 $l = r+1$이다. 이때 m^*가 혼성균형이 아니기 위해서는 $r+1$이 다른 유형을 보고해야 한다. 보조정리 5의 증명에서와 같이 결국 s가 유한하므로 모순이 유도된다. 따라서 베이즈 내쉬 균형 m^*는 혼성균형이 된다. 그런데 가능한 사전확률분포는 분산적이므로 $p(\alpha_{-j}^{-1}(\theta_{-j})) \neq p(\theta_{-j})$이다. 그러므로 어떤 대리인 j가 다음을 만족하는 $w_j(\theta_{-j})$를 찾을 수 있다.

$$\sum_{\theta_{-j}} w_j(\theta_{-j}) p(\theta_{-j}) < 0$$

$$\sum_{\theta_{-j}} w_j(\theta_{-j}) p(\alpha_{-j}^{-1}(\theta_{-j})) > 0$$

---

16) σ_1은 II절에서와 같이 '1 단계)'에서 보고한 대리인들의 사전확률 벡터이다.

따라서 j는 이탈하고, 균형이라는데 모순이 된다.

3) 모든 베이즈 내쉬 균형에서 (n-1)명 이상의 대리인들에 대해 $\sigma_1^i = p$ 이다.

그렇지 않은 베이즈 내쉬 균형이 있다고 하자. 즉, 1단계에서 2명 이상의 대리인들이 거짓된 사전확률을 보고하는 경우이다. 1), 2)에 의하여 모든 베이즈 내쉬 균형은 $(\cdot, \theta, 0)$의 형태를 갖는다. 따라서 2명 이상이 거짓된 사전확률분포를 보고하는 경우 어떤 대리인 j가 다음을 만족하는 $w_j(\theta_{-j})$를 찾을 수 있다.

$$\sum_{\theta_{-j}} w_j(\theta_{-j})p^*(\theta_{-j}) < 0$$

$$\sum_{\theta_{-j}} w_j(\theta_{-j})p(\theta_{-j}) > 0$$

그러므로 j는 이탈하여 $m_3^j \neq 0$을 보고한다. 따라서 모순이다. 단계 1)과 단계 2)의 1), 2), 3)에서 모든 가능한 베이즈 내쉬 균형 σ에 대하여 $g(\sigma(e)) = x(e)\ \forall e \in E$임을 알 수 있다.

이와 관련하여 Duggan(1998)도 주인이 대리인들의 사전확률분포를 모르는 경우에도 차선의 배분규칙에 대한 임의의 근방 내에 있는 배분을 실질적으로 실행할 수 있음을 보였다.[17] 그는 대리인들이 혼합전략을 사용할 수 있게 허용하고 사전확률분포가 유한하다는 제한을 두지 않은 점에서 본고의 정리 3보다 일반화된 결과를 얻고 있다. 그러나 정리 3에서는 그의 연구와는 달리 차선의 배분규칙 그 자체를 완전실행할 수 있는 충분조건을 찾았다. 이제 본 절의 3항에서는 생산량이 강단조성을 갖는 경우 실질적 실행이 가능함을 보인다.

---

17) 실질적 실행이 가능할 때, 배분규칙 중에서 생산량 할당은 변화시키지 않고 이전 지출만 임의의 아주 적은 양으로 바꾸는 경우 '정확히 실행 가능하다'(exactly implementable)고 한다. 이러한 정의에 의하면 Duggan(1998)과 다음의 3항의 연구는 정확한 실행에 대한 것이다.

3. 실질적 실행(virtual implementation)

보조정리 3에서 베이즈 유인 일치적인 배분 규칙을 우월 전략으로 대등하게 부분 실행할 수 있음을 보였다. 그런데 보조정리 3에서 이전지급을 설정할 때 대리인들이 한 단계 높게 자신의 유형을 보고하는 것이 진실된 유형을 보고하는 것과 동일한 효용을 주게 하였다. 이러한 이전지급의 설정으로 복수 균형이 발생할 수 있게 된다. 따라서 이러한 때 아주 적은 임의의 이전지급을 추가로 지급하여 대리인들이 진실된 유형을 보고하는 것이 강한 우월 전략이 되게 할 수 있다면 주어진 배분규칙을 실질적으로 실행할 수 있다. 다음의 보조정리 6은 그것이 가능한 조건을 보여준다.

보조정리 6: 비용함수가 강한 단일교차조건(single crossing condition)을 만족하고 생산량이 강단조성을 갖는다고 하자. 이때 베이즈 유인 일치적인 배분 규칙 $(q(\theta), t(\theta))$을 실질적으로 강한 우월 전략으로 실행할 수 있다

증명: 보조정리 3의 이전지급을 다음과 같이 전환하자. 어떤 대리인 i를 선택한다. 대리인 i가 자신의 유형을 한 단계 높게 보고하는 경우에만 진실을 보고하는 경우와 같은 효용을 얻고 다른 거짓된 유형을 보고할 때 진실을 보고하는 경우보다 적은 효용을 얻는다. 따라서 대리인들의 유형의 집합과 가능한 사전확률분포의 집합이 유한집합이므로 다음의 집합 S에 대해서 최소값을 찾을 수 있다.

$$S=\{U^i(\theta_{-i},\theta_i^r,p \mid \theta_i^r,p)-U^i(\theta_{-i},\theta_i^l,p \mid \theta_i^r,p),\ \forall r,\ l\neq r+1,\ \forall p\}$$

이때 최소값을 ε^*라 하고 이보다 적은 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 다음의 이전지급을 설정한다.

$$r=s\text{일 때}\quad t_i(\theta_{-i},\theta_i^s,p)=\overline{t_i}(\theta_{-i},\theta_i^s,p)$$

$$r\neq s\text{일 때}\quad t_i(\theta_{-i},\theta_i^r,p)=\overline{t_i}(\theta_{-i},\theta_i^r,p)+\varepsilon/r$$

이러한 이전지급을 설정하면 진실을 보고하는 것이 자신의 유형을 한 단계 높게 보고하는 것보다 높은 효용을 주는 것을 쉽게 알 수 있다. 또한 다른 우월 전략 유인 일치 제약식들은 여전히 강 부등호로 성립함을 알 수 있다. 따라서 대리인들이

진실된 유형을 보고하는 것이 강한 우월 전략이 된다.

정리 4: 대리인의 수가 2명 이상이라고 하자. 그리고 다음을 가정한다. (i) 사전 확률분포 p가 확산되어(diffuse) 있다. (ii) 비용함수가 강한 단일교차조건(single crossing condition)을 만족한다. (iii) 생산량이 강단조성을 갖는다. 이때 배분 규칙 $x(\theta, p)=(q(\cdot), t(\cdot))$와 대등한 배분 규칙 $\bar{x}(\theta, p)=(q(\cdot), \bar{t}(\cdot))$을 완전 베이즈 균형(perfect Bayesian equilibrium) 개념으로 실질적으로 실행할 수 있다.

증명: 다음과 같은 메커니즘을 고려하자.

게임은 다음과 같이 순차적으로(sequentially) 두 단계로 진행된다.

1 단계: $(i, i+1)$의 대리인들간의 게임이 진행된다. 이때 $i=n$이면 $i+1=1$이다. 대리인 i는 자신의 가능한 한계 분포집합 P에서 하나 원소를 주인에게 보고하고 그 보고가 공개된다. 또 주인은 2 단계에 $x(m_2, m_1)$을 실행한다고 공약한다.

2 단계: 이러한 정보를 얻은 후에 $(i+1)$은 주인에게 자신의 유형($m_2^{i+1} \in M_2^{i+1}$)과 $m_3^{i+1} \in M_3^{i+1}$를 비공개로 적어낸다. m_3^{i+1}은 $i+1$이 i의 사전확률 보고에 동의한다는 의미로 '0'를 보내는 것 또는 i의 보고에 반론을 제기한다는 의미로 $i+1$과 주인사이의 유형의 보고에 의존하는 이전 지급을 제시하는 것 중에 하나를 선택하는 것이다. 이때 이전 지급이 충족해야될 조건은 다음과 같이 i가 자신의 진실된 사전확률을 보고하면 $i+1$의 기대이익이 음수가 되도록 해야 한다는 것이다.

$W_{i+1}=\{w_{i+1} : \Theta_i \rightarrow R \mid \forall \theta_i, \ |w_{i+1}(\theta_i)| \leq M, \ \Sigma w_{i+1}(\theta_i) p^i(\theta_i) < 0\}$를 보고하여 도전한다.

단, M은 유한집합인

$\{\ |U^i(\theta_{-i}, \theta_i, p \mid \theta_i, p) - U^i(\theta_{-i}, \theta_i, \hat{p} \mid \theta_i, p)|\ , \forall p, \hat{p}, i, \theta_i\}$의 최대값 즉, 어떤 거짓된 사전확률분포를 보고할 때 얻을 수 있는 이득보다 크게 설정한다.

이는 대리인 $i+1$이 반론을 제기하면, 대리인 i는 2 단계에 도달했을 때 어떤 경우에 비하여 나빠지게 하고 주인이 흑자를 얻을 수 있도록 충분히 큰 M의 벌금을 부과하는 것이다.

일반성을 잃지 않고 대리인의 수가 2명인 경우 $i=1$의 전략에 대해 살펴보자. 두 단계로 나누어 대리인 1이 대리인 2의 전략에 관계없이 진실을 보고한다는 것을 보이자.

(단계 1) 1) $m_3^2=0$이면, 대리인 1은 진실을 보고하는 것이 강한 우월 전략이므로 항상 진실된 유형을 보고한다는 것은 자명하다.

2) $m_3^2\neq 0$이면, 대리인 1은 자신의 유형의 보고에 관계없이 M의 벌금을 내므로 진실을 보고하는 것이 강한 우월 전략이므로 진실된 유형을 보고한다.

(단계 2) (단계 1)에서 대리인 2의 보고에 관계없이 대리인 1은 자신의 진실된 유형을 보고한다는 것을 보였다. 그런데 대리인 2도 이를 알고 있고, 대리인 1은 그러한 사실을 안다. 따라서 대리인 1은 자신이 진실된 한계 분포를 보고하면 대리인 2가 동의하고, 그렇지 않으면 대리인 2가 반론을 제기하여 자신은 벌금 M을 낸다는 사실을 알고 있다. 그런데 M은 어떤 거짓된 사전확률분포를 보고해서 얻는 이득보다 크므로 결국 대리인 1은 진실된 분포를 보고하는 것이 최적 전략이 된다.

본 정리는 대리인들에게 혼합전략을 사용하게 해도 성립함을 쉽게 알 수 있다. 이와 관련하여 Brusco(1998)는 경매제도를 분석하면서 순차적인 메커니즘을 설계하여 완전 베이즈 균형(perfect Bayesian equilibrium) 개념으로 원하는 결과를 완전 실행할 수 있음을 보였다. 그러나 그의 모형은 주인이 사전확률분포를 공통지식으로 갖는다고 가정한 점에서 본 연구와 차이가 있다. 그리고 1단계에서 대리인들이 속임을 쓰는지를 서로 검증할 수 있게 한 점은 본고와 같으나 1단계에서 대리인들이 상대방의 보고에 대해 이의를 제기하는 경우에만 2단계로 게임이 넘어가고 그렇지 않은 경우는 1단계에서 게임이 끝나게 된다는 점에서 차이가 난다. 특히 정리 4와는 달리 그의 메커니즘에서는 원하지 않는 균형이 생기지 않게 하기 위하여 대리인들이 최적 전략을 갖지 않게 전략집합을 설정한 것은 메커니즘의 현실성을 약화시킨다.[18]

---

18) 같은 맥락에서 정리 2, 3의 메커니즘도 원하지 않는 결과에서 최적 전략을 갖지 않도록 메커니즘을 설계한데서 오는 비현실성을 갖는다.

V. 결 론

본 연구에서는 주인과 다수 대리인이 있는 경우 베이즈 메커니즘 디자인 문제를 다루었다. Mookherjee and Rechelstein (1992)은 사전확률분포가 주인과 대리인의 공통지식이고 연속인 경우에 베이즈 유인 일치적인 배분규칙을 (약한) 우월 전략으로 대등하게 실행할 수 있는 필요·충분조건을 찾아냈다. 그러나 그들의 메커니즘의 균형은 유일하지 않다. 즉 우월 전략으로 대등하게 실행할 때 주인이 원하지 않는 균형을 낳을 수 있다. 본고에서는 Mookherjee and Reichelstein (1992)의 모형을 사전확률분포가 이산분포인 경우로 확장하였다. 우월 전략으로 대등한 실행을 하는 경우에 복수 균형을 갖고 주인이 원하지 않는 균형이 존재하는 것을 예를 들어 보였다. 이때 주인이 원하지 않는 균형을 제거하여 원하는 결과와 대등한 것을 베이즈 내쉬 균형개념으로 완전실행할 수 있는 충분조건을 보였다. 그런데 완전실행의 충분조건으로 이산분포의 경우가 연속분포의 경우보다 강한 것이 필요함을 보였다. 또한 기존의 베이즈 메커니즘의 가정을 완화하여 주인이 대리인들의 사전확률분포 대한 정확한 지식이 없는 경우의 문제를 다루었다. 이때에도 대리인들이 순수전략만을 사용한다면 주인이 차선의 결과를 베이즈 균형 개념으로 실행할 수 있는 충분조건을 제시했다. 더욱이 순차적인 2단계 메커니즘을 도입하면 대리인들이 혼합전략을 사용하게 하더라도 주인은 완전 베이즈 균형 개념으로 차선의 결과를 실행할 수 있음을 보였다.

■ 참고문헌

1. Brusco, S., "Unique Implementation of the Full Surplus Extraction Outcome in Auctions with Correlated Types," *Journal of Economic Theory*, Vol. 80, 1998, pp. 185~200.
2. Duggan, J., "An Extensive Form Solution to the Adverse Selection Problem in Principal/multi-agent Environments," *Review of Economic Design*, Vol. 3, 1998, pp. 167~191.
3. Harsanyi, J., "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players," Parts I-III, *Management Science*, Vol. 14, 1967, pp. 159~182, pp. 320~334, pp. 486 ~502.

4. Jackson, M. O., "Bayesian Implementation," *Econometrica*, Vol. 59, 1991, pp. 461~477.
5. Ledyard, J., "Incentive Compatibility and Incomplete Information," *Journal of Economic Theory*, Vol. 18, 1978, pp. 171~189.
6. Matsushima, H., "Bayesian Monotonicity with Side Payments," *Journal of Economic Theory*, Vol. 59, 1993, pp. 107~121.
7. Mookerjee, D. and S. Reichelstein, "Dominant Strategy Implementation of Bayesian Incentive Compatible Allocation Rules," *Journal of Economic Theory*, Vol. 56, 1992, pp. 378~399.
8. Palfrey, R. and S. Srivastava, *Bayesian Implementation, Monograph, to Appear in the Series, Fundamental of pure and Applied Economics*, Harwood Academic Publishers, 1993.
9. Palfrey, R., "Implementation Theory," Working Paper, California Institute of Technology, 2000, pp. 11~13.

〈부록〉

보조정리 2의 증명: 주어진 최적화의 문제는 목적함수가 가분적인(separable) 특성을 갖고 있으므로 이를 이용하여 다음과 같이 해결한다. 먼저, 주어진 $q(\theta)$를 생산할 때 주인의 총비용($\sum_{i=1}^{n} t_i(\theta)$)을 최소화시켜 주는 $t_i(\theta)$를 찾는다.

이때 $t_i(\theta)$는 $q(\theta)$로 표현될 수 있다. 다음 단계는 목적함수에 이들을 대입하여 $q(\theta)$에 대한 최대화의 문제를 푸는 것이다. 증명은 다음과 같이 두 단계로 이루어진다. 1 단계에서는 P Ⅱ의 주어진 $q(\theta)$에 대하여 주인의 총비용을 최소화시키는 $t_i(\theta)$를 $q(\theta)$로 나타낸다. 2 단계에서는 1 단계에서 구한 $t_i(\theta)$의 해가 P Ⅰ의 제약식들을 모두 만족시킴을 보임으로써 증명은 충분하다. 이는 다음과 같은 이유에서이다. 주어진 $q(\theta)$를 생산하는데 $t_i(\theta)$에 대한 P Ⅰ의 실행가능 집합이 P Ⅱ의 그것의 부분집합이므로 P Ⅰ의 최소비용은 P Ⅱ의 최소비용이상이다. 그런데, 주어진 $q(\theta)$를 생산하는데 P Ⅱ에서 최소비용을 주는 $t_i(\theta)$의 해를 P Ⅰ에서도 얻을 수 있음을 단계 1과 2에서 보였으므로 두 프로그램은 같은 최적해와 최적값을 갖는다.

(단계 1) 프로그램 〔min $\sum_{i=1}^{n} t_i(\theta)$ s.t. (3), (4)〕의 최적해는 다음 (A1)와 (A2)를 만족하는 $t(\theta)$이다.

$$E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^s \mid \theta_i^s)) = 0 \tag{A1}$$

$$E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r \mid \theta_i^r)) = \sum_{k=r+1}^{s} E_{\Theta_{-i}}\{C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^k), \theta_i^k) - C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^k), \theta_i^{k-1})\} \tag{A2}$$

단, $r = 1, \ldots, s-1$.

(i) $r = s$이면 최적해에서 $E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^s \mid \theta_i^s)) = 0 \ \forall i$이다.

최적해에서 $E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^s \mid \theta_i^s)) > 0$라고 가정하자. 이때 다른 제약식들을 만족시키면서 $E_{\Theta_{-i}}(t_i(\theta_{-i}, \theta_i^s))$를 감소시킬 수 있다. 따라서 목적함수 값을 증가시킬 수

있다. (모순)

(ii) $r=s-1$이면 최적해에서 (A2)가 성립한다.

즉, $E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i},\theta_i^{s-1} \mid \theta_i^{s-1}))=$

$E_{\Theta_{-i}}\{C_i(q(\theta_{-i},\theta_i^s),\theta_i^s)-C_i(q(\theta_{-i},\theta_i^s),\theta_i^{s-1})\}$이다.

(4)의 제약식 집합에서 $t_i(\theta_{-i},\theta_i^{s-1})$과 관계된 것은 다음의 두 식이다.

$$E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i},\theta_i^{s-1} \mid \theta_i^{s-1}))\geq E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i},\theta_i^{s} \mid \theta_i^{s-1})) \quad \text{(A3)}$$

$$E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i},\theta_i^{s-2} \mid \theta_i^{s-2}))\geq E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i},\theta_i^{s-1} \mid \theta_i^{s-2})) \quad \text{(A4)}$$

(A3)이 구속적이지 않다고 하자. 이때 $t_i(\theta_{-i},\theta_i^{s-1})$을 (A4)을 만족시키면서 감소시킬 수 있다. 따라서 최적에서는 (A3)이 구속적이므로 다음 식이 성립한다.

$$E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i},\theta_i^{s-1} \mid \theta_i^{s-1}))=E_{\Theta_{-i}}\{t_i(\theta_{-i},\theta_i^s)-C_i(q_i(\theta_i,\theta_i^s),\theta_i^{s-1})\}$$
$$=E_{\Theta_{-i}}\{C_i(q(\theta_{-i},\theta_i^s),\theta_i^s)-C_i(q_i(\theta_s,\theta_i^s),\theta_i^{s-1})\}$$

(iii) (A2)가 $n\geq r+1$ (단, $r\geq 1$) 까지 성립한다고 가정하고 $n=r$일 때도 성립함을 보이자. 가정에 의하여 다음이 성립한다.

$$E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i},\theta_i^{r+1} \mid \theta_i^{r+1}))=\sum_{k=r+2}^{s}E_{\Theta_{-i}}\{C_i(q(\theta_i,\theta_i^k),\theta_i^k)-C_i(q(\theta_i,\theta_i^k),\theta_i^{k-1})\}$$

(A2)가 r에서 성립함을 보이면 된다. (4)의 제약식 집합에서 $t_i(\theta_i,\theta_i^r)$과 관계된 것은 다음의 두 식이다.

$$E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i},\theta_i^{r} \mid \theta_i^{r}))\geq E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i},\theta_i^{r+1}) \mid \theta_i^{r})) \quad \text{(A5)}$$

$$E_{\theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^{r-1} \mid \theta_i^{r-1})) \geq E_{\theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r) \mid \theta_i^{r-1})) \tag{A6}$$

(A5)가 구속적이 아니라고 하자. 이때 $t_i(\theta_{-i}, \theta_i^r)$를 (A6)을 만족시키면서 감소시킬 수 있다. 따라서 최적에서는 (A5)가 구속적이므로 다음의 (A7)이 성립한다.

$$E_{\theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r \mid \theta_i^r)) = E_{\theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^{r+1} \mid \theta_i^{r+1}))$$
$$+ E_{\theta_{-i}}\{C_i(q_i(\theta_{-i}, \theta_i^{r+1}), \theta_i^{r+1}) - C_i(q_i(\theta_{-i}, \theta_i^{r+1}), \theta_i^r)\} \tag{A7}$$

(A7)을 정리하면 원하는 결과를 얻을 수 있다.

(단계 2) 단계 1에서 구한 해가 P I의 제약식 집합 (1)과 (2)를 모두 충족시킴을 보이자.

(i) 개인적 합리성 제약식들의 집합인 (1)을 충족한다.

$r = s$일 때는 명백하다.

$r^i = 1, \ldots, s-1$일 때를 보자. 가정에 의해 $(\partial C_i(q, \theta_i)/\partial\theta_i) > 0$이므로 다음이 성립한다.

$\theta_i^k > \theta_i^{k-1}$이므로 $C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^k), \theta_i^k) - C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^k), \theta_i^{k-1}) > 0$이다.

(A2)에 의하여 $\forall r \ E_{\theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r \mid \theta_i^r)) > 0$이다.

(ii) 유인 일치 제약식들 집합인 (2)를 충족시킨다.

대리인 i의 참된 유형이 θ_i^r라고 하자.

i) $r > l$이면 유인 일치 제약식들이 만족되는지를 보이자.

$$E_{\theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r \mid \theta_i^r)) - (U^i(\theta_{-i}, \theta_i^l \mid \theta_i^r))$$
$$= E_{\theta_{-i}} | C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^l), \theta_i^r) - C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^l), \theta_i^l)$$
$$- \sum_{k=l+1}^{r} (C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^k), \theta_i^k) - C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^k), \theta_i^{k-1})) | \tag{A8}$$

보조정리 1에 의하여 비용함수 $C_i(q(\theta), \theta_i)$는 강단조성을 갖는다.

$\theta_i^k > \theta_i^l$ 이므로 $\frac{\partial}{\partial\theta_i} C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^l), \theta_i) > \frac{\partial}{\partial\theta_i} C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^k), \theta_i)$

$\forall k \geq l+1$이다.

구간 $[\theta_i^{k-1}, \theta_i^k]$에서 적분을 하면 다음 관계를 얻는다.

$$C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^l), \theta_i^k) - C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^l), \theta_i^{k-1}) >$$
$$C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^k), \theta_i^k) - C_i(q(\theta_{-i}, th\eta_i^k), \theta_i^{k-1})$$

이를 이용하여 (A8)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$E_{\Theta_{-i}}(U^i(\theta_{-i}, \theta_i^r \mid \theta_i^r)) - (U^i(\theta_{-i}, \theta_i^l \mid \theta_r))$$
$$> E_{\Theta_{-i}} \{C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^l), \theta_i^r) - C_i(q(\theta_{-i}, \theta_i^l), \theta_i^l)$$
$$- \sum_{k=l+1}^{r} (C_i(q(\theta_{-i,} \theta_i^l), \theta_i^k) - C_i(q(\theta_{-i,} \theta_i^l), \theta_i^{k-1}))\} = 0$$

따라서 유인 일치 제약식들이 강하게 만족된다.

ii) $l > r$이면 유인 일치 제약식들이 만족되는지를 보이자.

i)과 비슷한 방법으로 증명할 수 있다. 그런데 $l = r+1$일 때는 유인 일치 제약식이 등호로 성립한다.

단계 1과 2에서 주어진 $q(\theta)$를 생산하는데 PII에서 최소비용을 주는 $t_i(\theta)$의 해를 P I에서도 얻을 수 있음을 단계 1과 2에서 보였으므로 두 프로그램은 같은 최적해와 최적값을 갖는다는 것을 알 수 있다.

A Study on Bayesian Mechanism Implementation

Bong-Ju Kim*

Abstract

This study deals with mechanism design problems in principal/multi-agent environments. In the case that a continuous prior distribution is a common knowledge among principal and agents, Mookherjee and Reichelstein (1992) derive necessary and sufficient conditions under which a Bayesian incentive compatible allocation rule can be equivalently implemented in (weakly) dominant strategies. However, it is not assured that the equilibrium is unique. We present an example that a direct mechanism equivalently implemented in dominant strategies can yield an undesirable equilibrium under the assumption of discrete prior distribution. Next, we show that the multiple equilibrium problem can be eliminated if we adopt a mechanism which let each agent report his own environment and challenge other agents' reports. The above mechanism presupposes a principal's common knowledge of agents' beliefs. However we can show that if agents are allowed to use pure strategies, a principal can be fully implementable her second best outcome in Bayesian equilibrium without her exact knowledge of agents' prior distributions. Moreover, even if agents are allowed to use mixed strategies, a principal can be virtually implementable her second best outcome in a perfect Bayesian equilibrium.

Key Words: Bayesian implementation, full implementation, virtual implementation

* Senior Researcher, KT Management Research Lab.