貨幣流通速度의 數學的 分割 *

金 學 㫲 **

논문초록 본 논문의 목적은 경제 전체의 평균 유통속도와 화폐총량을 부문 별로 분할하는 것이다. 이 분할은 경제학적 가정이 없는 순수한 수학적 분할이다. 유통속도는 양면의 특징을 갖고 있다. 피셔형의 교환방정식에 나타나는 유통속도 V와 캠브리지형의 교환방정식에 나타나는 마샬의 k이다. 피셔형의 교환방정식은 본원문제를 제공하고 캠브리지형의 교환방정식은 쌍대문제를 제공한다. 본원문제와 쌍대문제 사이에서 발생하는 대체효과 불가능성 현상에 기초하여 유통속도를 분할할 수 있음을 보인다.

핵심주제어: **유통속도 무차별곡선, 등속도직선, 유통시간 무차별곡선, 등시간직선, 강대체효과 불가능성, 강수량효과 불가능성, 약대체효과가능성, 약수량효과가능성**

경제학문헌목록 주제분류: E4, G2

---

* 이 연구는 1997~98년 한국은행의 재정적 지원으로 수행되었다.
필자는 익명의 심사위원들로부터 좋은 조언을 받았다. 감사를 표한다. 다만 오류가 있다면 그것은 필자의 것이다.

** 연세대학교 상경대학 경제학과 교수
e-mail: hakun@base.yonsei.ac.kr

I. 머리말

본 논문의 목적은 경제 전체에서 사용하는 화폐의 평균 유통속도를 부문별로 분할하고, 경제 전체의 화폐 총량을 부문별로 분할하는 공식을 제시하는 것이다. 부문별 화폐량과 부문별 유통속도는 다른 경제변수와 마찬가지로 일반균형 체계에서 결정되는 것은 틀림없는 사실이지만 이 같은 방법으로 분할은 불가능한 것처럼 보인다. 단적인 이유 가운데 하나로서 부문별 화폐공급함수가 알려져 있지 않다는 점을 들 수 있다. 따라서 본 논문은 일반균형 방법 보다는 유통속도에 숨겨진 수학적 특성을 이용하여 수학적으로 분할하고자 한다. 이 분할은 경제학적 가정, 공리, 그리고 전제에 의존하지 않는 순수한 수학적 분할이다.

유통속도 분할의 핵심에는 피셔(Fisher, 1911)의 교환방정식 $MV \equiv T$이 자리잡고 있다. 여기서 M은 경제 전체의 명목화폐총량이고 V는 경제 전체의 평균 유통속도이다. 명목총거래액 T를 명목실물거래액 T^Y와 명목금융거래액 T^F로 분리할 때 교환방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$MV = T^Y + T^F \tag{1}$$

케인즈는 교환방정식 (1)의 우항의 거래액을 분리하는 대신, 에사르(des Essars, 1895), 피셔(Fisher, 1911), 스나이더 (Snyder, 1924)의 연구를 계승하여 좌항의 화폐총량과 평균유통속도를 분리하는 것에 대해서 연구하였다. 그는 이 분할의 중요성을 다음과 같이 서술하였다.

> It is important, therefore, to distinguish between the average velocity of money in a variety uses and the 'true' velocity of money in a particular use—meaning by the latter the ratio of the volume of a particular type of transactions to the quantity of money employed in them; for fluctuations in 'average' velocities may be due, not to fluctuations in 'true' velocities, but to fluctuations in the relative importance of different types of transactions. (Keynes, 1930, vol. II, p. 38, quotations in original).

이 서술을 식 (1)에 적용하면 부문별 '진짜' 유통속도 V^Y와 V^F를 각각 $\frac{T^Y}{M^Y}$와 $\frac{T^F}{M^F}$로 정의할 수 있다. 따라서 식 (1)의 좌항 MV를

$$MV = M^Y V^Y + M^F V^F \tag{2}$$

로 분할할 때 식 (2)는

$$V = m^Y V^Y + (1 - m^Y) V^F \tag{3}$$

로 표현된다. 여기서 $m^Y = \frac{M^Y}{M}$ 이다. 이렇게 하여 케인즈는 '평균(average)' 유통속도 V를 부문별 '진짜' 유통속도 V^Y와 V^F의 "산술평균(arithmetic mean)"으로 정의하였다.

문제는 '진짜(true)' 유통속도를 어떻게 분할하느냐이다. 분할에 대한 케인즈의 관심은 후에 일반이론(Keynes, 1936)에서 식 (2)의 첫째 항을 거래적/예비적 동기의 화폐수요로, 둘째 항을 투기적 동기에 의한 화폐수요로 분할하는 쪽으로 발전하였다. 이러한 분할은 이후 표준이 되었지만 계량경제학적으로 이 분할은 표본기간의 길이에 상관없이 한번의 분할로 그치는데 불과하고 매기 분할은 아직 아무도 하지 못하고 있다. 그럼에도 불구하고 제한된 범위 내에서 현금통화의 유통속도를 연구한 논문(Fisher, 1909; Snyder, 1924; Laurent, 1970; Cramer and Reekers, 1976; Cramer, 1981; Boeschoten and Fase, 1984)이 있으며 클래머(Cramer, 1989)는 분할의 어려움을 논하고 있다. 아래에서 본 논문은 평균유통속도를 분할하는 일반적 방법을 제시한다.

II. 교환방정식의 본원문제 (primal problem)

1. 기본 정의식

하나의 경제를 부문 1과 부문 2로 나눈다. 유량변수 측면에서 관찰할 때 경제 전체의 명목거래총액은 A이고 부문 1의 명목거래액은 A_1이며 부문 2의 명목거래액은 A_2이다. 이들 사이에서 다음의 거래액 정의식이 성립한다.

$$A \equiv A_1 + A_2 \qquad \text{유량변수 정의식} \qquad (4)$$

이 수량을 거래하기 위하여 화폐량이 필요하다. 그러므로 저량변수 측면에서 볼 때 부문 1의 명목화폐량을 M_1으로 표기하고 부문 2의 명목화폐량을 M_2로 표기하면 화폐량 정의식은 다음과 같다.

$$M \equiv M_1 + M_2 \qquad \text{저량변수 정의식} \qquad (5)$$

정의식 (4)은 유량변수 사이의 관계이고 정의식 (5)는 저량변수 사이의 관계이다. 서로 독립이다. 케인즈(Keynes 1930, vol. II, 38)가 제시한대로 유량변수인 부문별 거래량과 저량변수인 부문별 화폐량 사이의 관계는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$V \equiv \frac{A}{M}, \quad V_1 \equiv \frac{A_1}{M_1}, \quad V_2 \equiv \frac{A_2}{M_2} \qquad \text{유량/저량 정의식} \qquad (6)$$

표현 (6)은 유량/저량 관계식이라고 부를 수 있는데 유량변수를 저량변수와 연결시키는 V_1은 부문 1의 '진짜' 유통속도, V_2는 부문 2의 '진짜' 유통속도, V는 경제 전체의 '평균' 유통속도이다. 교환방정식을 정의식 (6)처럼 피셔형(Fisherian form)으로 표현한 것을 본원문제(primal problem)라고 칭하자. 이때 부문 1의 화폐비율 $m = \dfrac{M_1}{M}$과 부문 1의 거래비율 $a = \dfrac{A_1}{A}$은 내생변수로써 일반균형 체계 속에서

상호작용에 의해 결정된다.

2. 유통속도의 등속도직선

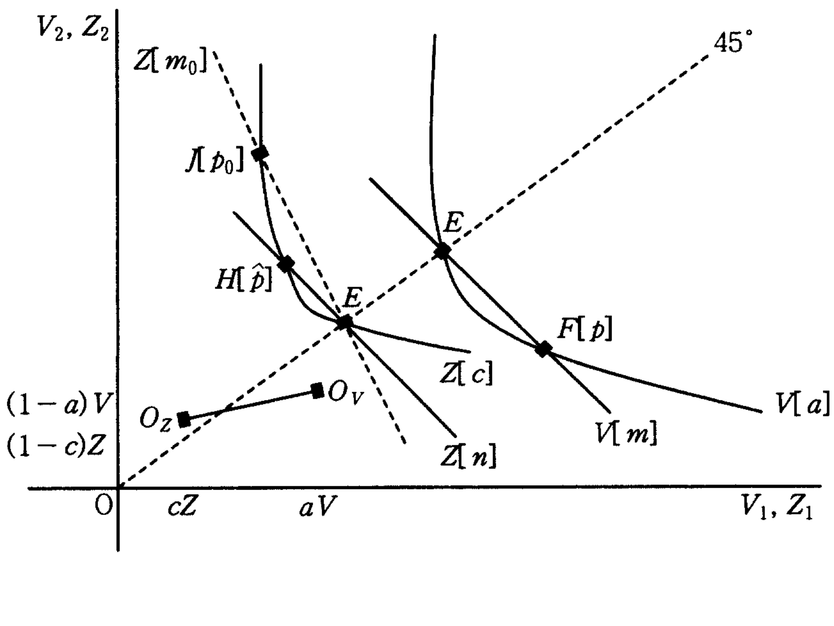
피셔형 교환방정식 (6)을 유량변수인 거래액 정의식 (4)에 대입하면 다음의 직선을 얻을 수 있다.

$$V = mV_1 + (1-m)V_2 \qquad \text{등속도직선} \qquad (7)$$

식 (7)은 케인즈(Keynes, 1930)가 제시했던 식 (3)과 동일한 형태로서 경제 전체의 '평균' 유통속도 V 는 각 부문 '진짜' 유통속도 V_1 과 V_2 의 "산술평균(arithmetic mean)"이다. 이때 화폐 총량에 대한 부문의 화폐량 비율인 가중치 m은 정의에 의해서

$$1 > m > 0 \qquad (8)$$

〈그림 1〉 본원공간의 유통속도의 분할



의 조건을 지켜야 한다. 〈그림 1〉은 본원문제를 기하학적으로 표현한 공간으로 편의상 본원공간(primal space)이라 부르자. 〈그림 1〉에서 직선 (7)의 기울기와 위치는 V와 m에 달려 있는데 하나의 직선의 모든 점에서 V와 m이 일정하게 주어져 있으므로 $V[m]$으로 표기하고 등속도직선(等速度直線 iso-velocity line)이라고 부를 수 있다.

3. 유통속도의 무차별곡선

이번에는 피셔의 교환방정식 (6)을 저량변수인 화폐량 정의식 (5)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 직각쌍곡선의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{V} = \frac{a}{V_1} + \frac{1-a}{V_2} \qquad \text{무차별곡선} \qquad (9)$$

직각쌍곡선 (9)은 등속도직선 (7)과 달리 '평균' 유통속도 V를 각 부문 '진짜' 유통속도 V_1과 V_2의 "조화평균(harmonic mean)"으로 나타내고 있는데 가중치가 a와 $1-a$이다. 〈그림 1〉의 본원공간에서 직각쌍곡선 (9)의 중심(center)의 좌표는 $O_V = [aV, (1-a)V]$이어서 직각쌍곡선의 위치와 모습은 가중치 a와 평균치 V에 달려 있으므로 직각쌍곡선 (9)의 이름을 $V[a]$으로 표기하도록 한다.

〈그림 1〉의 곡선 $V[a]$가 직각쌍곡선 (9)의 기하학적 표현인데 동일한 V를 구성하는 V_1과 V_2의 무수한 조합의 집합으로 유통속도의 무차별곡선(velocity indifference curve)이라고 부를 수 있다.

〈그림 1〉의 무차별곡선 $V[a]$와 등속도직선 $V[m]$은 두 점에서 만난다. 점 F와 점 E이다. 이 결과는 대수적으로는 "산술평균"인 등속도직선 (7)을 "조화평균"인 무차별곡선 (9)에 대입하여 얻은 다음 두 개의 풀이와 동일하다.

$$E = (V, V), \qquad F = \left(\frac{a}{m}V, \ \frac{1-a}{1-m}V\right) \qquad (10)$$

일반적으로 $a \neq m$이므로 자명한(trivial) 풀이 E를 배제하면 점 F가 '진짜' 풀이가 된다. 점 F에서 부문의 '진짜' 유통속도는

$$V_1 \neq V_2 \qquad\qquad a \neq m \text{ 일 때} \tag{11}$$

이다. 현재 경제가 점 F에 있다고 설정하고 그 위치를 찾기 위하여 그 특성을 조사하자.

4. 한계유통속도 균등의 법칙

무차별곡선 $V[a]$ 상의 '진짜' 풀이인 점 F 에서 접하는 직선(그림 1에서는 생략)의 기울기를 p 라 정의하자. 그러면 점 F에서 p는 무차별곡선 $V[a]$의 기울기 $\left(-\dfrac{dV_2}{dV_1}\right)_{V[a]}$ 와 일치하므로 다음이 성립한다.

$$p = \frac{a}{1-a}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \Bigg|_F \qquad \text{한계유통속도 균등의 법칙} \tag{12}$$

기하학적으로는 〈그림 1〉에서 무차별곡선 $V[a]$ 상의 '진짜' 풀이 점 F 에 접하는 직선의 기울기가 p 이므로 그 점의 특징을 나타내기 위하여 이 점을 $F[p]$로 표기한다. 유통속도의 미분을 한계유통속도라고 이름할 때 식 (12)의 오른쪽 항의 분자와 분모는 각 부문의 한계유통속도를 나타내므로 점 $F[p]$에서 두 부문 사이에 한계유통속도 균등의 법칙이 성립한다고 말할 수 있다. 그러나 이것은 식 (12)의 성립이 반드시 최적화의 가정을 요구하는 것이 아니고 최적화의 가정 없이도 식 (12)는 정의로서 성립한다.[1)]

---

1) 점 F〔p〕에서 반드시 최적화를 "가정"할 필요가 없다. 단지 수학적으로 무차별곡선의 한 점 F〔p〕에서 접하는 접선은 반드시 하나가 존재하므로 그 접선의 기울기와 그 점에서 무차별곡선의 기울기가 같아지는 조건을 표시하는 식 (12)이면 족하다.

5. 수량효과

전통적으로 비교분석에 의하면 점 $F[p]$로 이동한 경로를 대체효과와 수량효과로 나누어 생각할 수 있다. 비교분석을 도입하기 위해서 우선 경제가 거래액 $\{C, C_1, C_2\}$의 경제에서 거래액 $\{A, A_1, A_2\}$의 경제로 이동한 현상으로 설정할 필요가 있다. 여기서 명목거래총액이 C이고 부문별 명목거래액이 각각 C_1과 C_2이다. 유량변수인 거래액 정의식은 다음과 같다.

$$C \equiv C_1 + C_2 \qquad \text{유량변수 정의식} \qquad (13)$$

명목거래액 $\{C, C_1, C_2\}$을 거래하는데 필요한 명목화폐총량은 N이고 부문별 명목화폐량은 각각 N_1과 N_2이다. 저량변수인 화폐량 정의식은 다음과 같다.

$$N \equiv N_1 + N_2 \qquad \text{저량변수 정의식} \qquad (14)$$

유량변수인 명목거래액과 저량변수인 명목화폐량 사이의 관계는 다음과 같은 피셔형 교환방정식으로 표현할 수 있다.

$$Z \equiv \frac{C}{N}, \quad Z_1 \equiv \frac{C_1}{N_1}, \quad Z_2 \equiv \frac{C_2}{N_2} \qquad \text{유량/저량 정의식} \qquad (15)$$

여기서 Z, Z_1, Z_2는 각각 해당 유통속도를 나타낸다. Z의 크기만 알려져 있을 뿐 Z_1과 Z_2는 알려져 있지 않다. 이상 세 개의 표현인 거래액 정의식 (13), 화폐량 정의식 (14), 피셔의 교환방정식 (15)은 비교분석에 필요하다. 세 개의 식에서 부문 1의 화폐비율 $n = \frac{N_1}{N}$과 부문 1의 거래비율 $c = \frac{C_1}{C}$은 내생변수로써 일반균형 체계에서 상호작용에 의해 결정된다.

피셔형 교환방정식 (15)을 거래액 정의식 (13)에 대입하면 다음의 직선이 성립한다.

$$Z = nZ_1 + (1-n)Z_2 \qquad \text{등속도직선} \qquad (16)$$

식 (16)은 또 하나의 등속도직선이다. 일반적으로 $c \neq n$ 이고 $1 \neq c+n$ 이다. 경제 전체의 '평균' 유통속도 Z는 두 부문 '진짜' 유통속도 Z_1과 Z_2의 "산술평균(arithmetic mean)"이다. 등속도직선 (16)의 기울기와 위치는 Z와 n에 달려 있는데 하나의 등속도직선상의 모든 점에서 Z와 n은 일정하므로 등속도직선 (16)을 $Z[n]$으로 표기한다. 〈그림 1〉에서 직선 $Z[n]$이 그것이다.

이번에는 피셔형 교환방정식 (15)을 화폐량 정의식 (14)에 대입하면 본원공간에서 또 하나의 무차별곡선

$$\frac{1}{Z} = \frac{c}{Z_1} + \frac{1-c}{Z_2} \qquad \text{무차별곡선} \qquad (17)$$

가 주어진다. 무차별곡선 (17) 역시 직각쌍곡선으로 중심의 좌표는 $O_Z = [cZ, (1-c)Z]$이다. 무차별곡선 (17)은 Z를 Z_1과 Z_2의 "조화평균(harmonic mean)"으로 나타낸 식으로 가중치는 c 와 $1-c$ 이다. 하나의 무차별곡선 상의 모든 점에서 평균치 Z와 가중치 c는 일정하게 주어져 있으므로 무차별곡선 (17)을 $Z[c]$로 표기한다. 〈그림 1〉에서 무차별곡선 $Z[c]$와 등속도직선 $Z[n]$은 H점과 E점 두 점에서 만난다. 이 결과는 대수적으로는 산술평균의 식 (16)을 조화평균의 식 (17)에 대입하여 얻은 다음의 두 개의 풀이와 동일하다.

$$E = (Z, Z), \qquad H = \left(\frac{c}{n}Z, \ \frac{1-c}{1-n}Z\right) \qquad (18)$$

점 E는 자명한 풀이이므로 일반적으로 배제한다. 점 H가 '진짜' 풀이이다. 즉 점 H 에서

$$Z_1 \neq Z_2 \qquad (19)$$

이다. 〈그림 1〉에 좌표(V_1 , V_2)와 (Z_1, Z_2)가 공통으로 그려져 있다. 무차별곡선 $Z[c]$ 상에서 '진짜' 풀이 (18)을 만족하는 한 점 H를 선택하고 이 점에서 접하는 직선(그림에서는 생략)의 기울기가 $\hat{p}$이라고 하자. 그러면 점 H에서 한계유통속도 균등의 법칙은 다음과 같다.

$$\hat{p} = \frac{c}{1-c}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 \Bigg|_H \qquad \text{한계유통속도 균등의 법칙} \qquad (20)$$

'진짜' 풀이인 점 H 에서 기울기가 $\hat{p}$ 이므로 이 점의 특징을 나타내기 위하여 $H[\hat{p}]$로 표기한다.

〈그림 1〉에서 경제가 무차별곡선 $V[a]$ 상의 점 $F[p]$로 이동하기 직전에 무차별곡선 $Z[c]$ 상의 점 $H[\hat{p}]$에 있었다. 점 $F[p]$와 점 $H[\hat{p}]$가 동일한 기울기를 가질 조건은 $p = \hat{p}$ 이다. 이것이 수량효과의 정의이다.

6. 대체효과

수량효과의 정의에 의해 $p=\hat{p}$ 이라면 점 $H[\hat{p}]$는 실제로 경제가 있었던 위치가 아니라 대체효과가 끝나고 수량효과가 시작하는 중간점이다. 〈그림 1〉의 무차별 곡선 $Z[c]$ 상에서 또 하나의 점 J을 선택하여 접선의 기울기를 $p_o \neq \hat{p}$로 표기하고 그 점을 $J[p_o]$로 표기하자. 이 점이 실제로 경제가 있었던 점으로 설정한다. 점 $J[p_o]$와 점 $H[\hat{p}]$는 "동일" 무차별곡선 $Z[c]$ 상에 있는 점이므로 두 점에서 평균치 Z와 가중치 c는 동일하다. 그러나 점의 위치가 다르므로 Z_1의 크기도 달라지는데 식 (15)의 $nZ_1 = cZ$ 에 의해서 점 $J[p_o]$의 화폐비율은 점 $H[\hat{p}]$의 화폐비율 n과 서로 달라야 한다. 점 $J[p_o]$의 화폐비율을 m_o라 표기하면 $m_o \neq n$이고 일반적으로 $m_o \neq m$이다. 그 결과 점 $J[p_o]$과 점 E를 연결하는 또 하나의 새로운 등속도선 $Z[m_o]$은

$$Z = m_o Z_1 + (1 - m_o) Z_2 , \qquad m_o \neq n \qquad \text{등속도직선} \tag{21}$$

이다. 〈그림 1〉의 점선 $Z[m_o]$이 그것이다. 일반적으로 $m_o \neq n$과 $m_o \neq m$이고 $m_o \neq c$ 이므로 등속도직선 (21)은 등속도직선 (16)과 다르다. 따라서 식 (17)의 하나의 무차별곡선 $Z[c]$에는 서로 다른 두 개의 등속도직선 $Z[n]$과 $Z[m_o]$가 지나간다. 이 가운데 식 (21)의 새로운 등속도직선 $Z[m_o]$은 무차별곡선 $Z[c]$과 두 점에서 만난다. 점 E와 점 $J[p_o]$ 이다. 대수적으로는 식 (21)을 식 (17)에 대입하면 무차별곡선 $Z[c]$에서 두 점의 좌표가 구해지는데, 점 $J[p_o]$가 '진짜' 풀이이다.

$$E = (Z,\ Z), \qquad J = \left(\frac{c}{m_o} Z,\ \ \frac{1-c}{1-m_o} Z \right) \tag{22}$$

지금까지 논의를 정리하자. 본원공간의 총효과는 기울기가 p_o에서 p로 변동할 때 경제가 대체효과에 의해서 "동일" 무차별곡선 $Z[c]$을 따라서 점 $J[p_o] = \left(\frac{c}{m_o} Z, \frac{1-c}{1-m_o} Z \right)$ 에서 점 $H[\hat{p}] = \left(\frac{c}{n} Z, \frac{1-c}{1-n} Z \right)$으로 이동하고, 다시 수량효과에 의해서 $\hat{p} = p$를 유지하며 점 $H[\hat{p}] = \left(\frac{c}{n} Z, \frac{1-c}{1-n} Z \right)$에서 "다른" 무차별곡선 $V[a]$ 상의 점 $F[p] = \left(\frac{a}{m} V, \frac{1-a}{1-m} V \right)$ 으로 이동한 현상이다. 점 $J[p_o]$를 본원출발점, 점 $H[\hat{p}]$를 본원중간점, 점 $F[p]$를 본원종착점이라고 부르자.

III. 교환방정식의 쌍대문제 (dual problem)

화폐수량설을 설명하는 방법에는 두 가지가 있다. 피셔형(Fisherian) 교환방정식과 캠브리지형(Cambridge) 교환방정식이다. 앞서 우리는 피셔형 교환방정식 (6)과 (15)를 분할의 기초로 삼았다. 이것을 '편의상' 본원문제라고 불렀고 본원공간에서

표현하였다. 여기서는 동일한 문제를 캠브리지형 교환방정식으로 설명할 것이다. 이 방식을 '편의상' 쌍대문제(dual problem)라고 부르고 이것을 표현하는 공간을 쌍대공간(dual space)이라고 부르자. 이제 경제가 본원공간에서 대체효과 정의에 의해 본원출발점 $J[p_o]$에서 "동일" 무차별곡선상의 본원중간점 $H[\hat{p}]$으로 이동하고 다시 수량효과 정의 $\hat{p}=p$ 에 의해 "다른" 무차별곡선상의 본원종착점 $F[p]$로 이동하는 본원현상이 쌍대공간에서는 어떻게 나타나는지 살펴보자.

1. 유통시간의 등시간선

피셔형 교환방정식에서 V가 단위시간에 유통하는 화폐량의 회전수, 곧 유통속도이므로 그의 역수 $k = \frac{1}{V}$는 화폐가 단위회전 하는데 걸리는 시간이 되는데 주(週) 또는 개월(個月)이 대표적인 예이다. 이것을 '편의상' 유통시간(transaction time)이라고 부르고 그의 미분을 한계유통시간 이라고 부르자. 그러면 피셔의 교환방정식 (6)을 $kV \equiv 1$, $k_1V_1 \equiv 1$, $k_2V_2 \equiv 1$의 변수 전환(transformation) 정의를 이용하여 다음과 같은 캠브리지 방식의 정의식 (23)으로 전환할 수 있다.

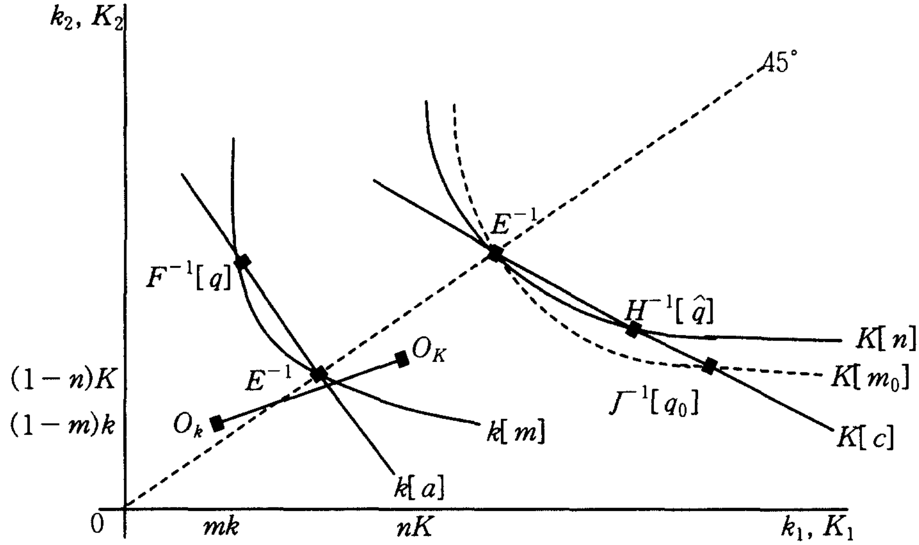
$$k \equiv \frac{M}{A} \;,\; k_1 \equiv \frac{M_1}{A_1} \;,\; k_2 \equiv \frac{M_2}{A_2} \qquad \text{저량/유량정의식 (23) = (6) 유량/저량정의식}$$

여기서 (23)=(6)은 두 식이 대수적으로 동일하다는 뜻이다. 캠브리지 방정식 (23)을 저량변수인 화폐량 정의식 (5)에 대입하면

$$k = ak_1 + (1-a)k_2 \qquad \text{등시간직선 (24) = 무차별곡선 (9)}$$

이다. 식 (24)에 의하면 평균유통시간 k은 부문 1의 유통시간 k_1과 부문 2의 유통시간 k_2의 "산술평균"인데 가중치는 각각 a 와 $1-a$ 이다. 가중치 a가 일정하게 주어져 있으므로 식 (24)을 등시간직선(等時間直線 iso-time line)이라고 부를 수 있는데 "산술평균"의 등시간직선 (24)을 변수 전환하면 "조화평균"의 무차별곡선

〈그림 2〉 쌍대공간의 유통시간의 분할



(9)와 대수적으로 동일하다. 따라서 (24)=(9)이다. 이처럼 본원공간과 쌍대공간의 관계는 조화평균과 산술평균의 표리관계이고 기하학적으로는 곡선과 직선의 표리관계이다. 등시간직선 (24)은 〈그림 2〉의 쌍대공간에서 그 특징이 k와 a로 규정되므로 $k[a]$로 표기한다. 〈그림 2〉의 등시간직선 $k[a]$는 〈그림 1〉의 무차별곡선 $V[a]$의 쌍대 그림이다.

2. 유통시간의 무차별곡선

이번에는 캠브리지 방정식 (23)을 유량변수인 거래액 정의식 (4)에 대입하면 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{k} = \frac{m}{k_1} + \frac{1-m}{k_2} \qquad \text{무차별곡선 (25) = 등속도직선 (7)}$$

식 (25)는 〈그림 2〉의 쌍대공간 (k_1, k_2)에서 중심이 $O_k = [mk, (1-m)k]$인 직각쌍곡선인데 이것을 변수전환한 식 (7)은 〈그림 1〉의 본원공간 (V_1, V_2)

상에서 등속도직선이 된다. 따라서 (25)=(7)이다. 이 경우는 쌍대공간의 "조화평균"이 본원공간에서 "산술평균"이 된 경우이다. 조화평균 (25)을 유통시간 무차별곡선(transaction time indifference curve)이라고 부를 수 있다. 〈그림 2〉에서 조화평균 (25)은 k와 m으로 특징지워지므로 무차별곡선의 이름을 $k[m]$으로 표기한다.

〈그림 2〉에서 무차별곡선 $k[m]$과 등시간직선 $k[a]$는 두 점 F^{-1}점과 E^{-1}점에서 만난다. 이 결과는 대수적으로는 산술평균의 식 (24)을 조화평균의 식 (25)에 대입하여 얻은 다음의 두 개의 풀이와 일치한다.

$$E^{-1}=(k,\ k),\quad F^{-1}=\left(\frac{m}{a}k,\ \frac{1-m}{1-a}k\right)\qquad \text{쌍대풀이 (26) = (10) 본원풀이}$$

$E^{-1}E=I$과 $F^{-1}F=I$ 이므로 쌍대풀이 (26)는 본원풀이 (10)와 정확하게 일치하는데 본원공간에서 점 F가 '진짜' 풀이이듯이 쌍대공간에서 점 F^{-1}가 '진짜' 풀이이다.

3. 한계유통시간 균등의 법칙

〈그림 2〉의 무차별곡선 $k[m]$ 상의 '진짜' 풀이인 점 F^{-1}을 생각하자. 이 점에서 접선의 기울기를 q로 정의하면 식 (25)에서 다음과 같은 한계유통시간 균등의 법칙이 성립한다.

$$q=\frac{m}{1-m}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2\Bigg|_{F^{-1}}\qquad \text{한계유통시간 균등의 법칙}\qquad (27)$$

여기서 q는 접선의 기울기이다. 일반적으로 $1\neq a+m$ 이므로 식 (12)와 식 (27)에서 $pq\neq 1$ 이다. 따라서 두 개의 한계유통속도(유통시간) 균등의 법칙인 식 (27)과 식 (12)는 독립이다. '진짜' 풀이 점 F^{-1}의 특징은 q로 나타낼 수 있으므로 $F^{-1}[q]$로 표기한다. 〈그림 2〉의 점 $F^{-1}[q]$는 본원종착점 $F[p]$에 대응하는

쌍대종착점이다.

4. 수량효과

앞서 우리는 〈그림 1〉의 본원종착점 $F[p]$에 대한 〈그림 2〉의 쌍대종착점 $F^{-1}[q]$의 특성을 살펴보았다. 이제 같은 방식으로 〈그림 1〉의 본원중간점 $H[\hat{p}]$에 대한 〈그림 2〉의 쌍대중간점 $H^{-1}[\hat{q}]$의 특성을 살펴 볼 차례이다. 피셔형 교환방정식 (15) 는 $ZK \equiv 1$, $Z_1K_1 \equiv 1$, $Z_2K_2 \equiv 1$의 정의를 이용하여 다음과 같이 캠브리지형 교환방정식으로 전환할 수 있다.

$$K \equiv \frac{N}{C}\ ,\quad K_1 \equiv \frac{N_1}{C_1}\ ,\quad K_2 \equiv \frac{N_2}{C_2}$$ 저량/유량정의식 (28) = (15) 유량/저량정의식

이 변수전환에 기초하여 캠브리지 교환방정식 (28) 을 화폐량 정의식 (14) 에 대입하면

$$K = cK_1 + (1-c)K_2$$ 등시간직선 (29) = 무차별곡선 (17)

이다. 이것은 또 하나의 등시간직선이다. 이번에는 캠브리지 교환방정식 (28) 을 거래량 정의식 (13) 에 대입하면

$$\frac{1}{K} = \frac{n}{K_1} + \frac{1-n}{K_2}$$ 무차별곡선 (30) = 등속도직선 (16)

을 얻는다. 또 하나의 유통시간 무차별곡선이다. 〈그림 2〉에 쌍대공간의 좌표(k_1, k_2) 와 (K_1, K_2) 가 공통으로 그려져 있다. 식 (29) 은 식 (17) 의 쌍대 방정식으로 서로 동일한 것이므로 (29) = (17) 이고, 식 (30) 은 식 (16) 의 쌍대 방정식으로 서로 동일한 것이므로 (30) = (16) 이다.

〈그림 2〉에서 조화평균 (30) 은 K와 n으로 특징 지워지므로 무차별곡선의 이름

을 $K[n]$으로 표기하고 산술평균 (29)은 그 특징이 K와 c로 규정되므로 등시간직선의 이름을 $K[c]$로 부른다. 〈그림 1〉에서 $Z < V$ 라고 설정하였으므로 〈그림 2〉에서 $k < K$ 이다. 따라서 $k[m]$은 $K[n]$보다 원점 $O = (0, 0)$에 더 가깝다.

산술평균의 등시간직선 (29)을 조화평균의 무차별곡선 (30)에 대입하면 다음과 같은 두 개의 풀이를 얻는다.

$$E^{-1} = (K, K), \quad H^{-1} = \left(\frac{n}{c}K, \ \frac{1-n}{1-c}K\right) \quad \text{쌍대풀이 (31) = (18) 본원풀이}$$

〈그림 2〉의 쌍대공간에서 무차별곡선 $K[n]$과 등속도직선 $K[c]$는 점 H^{-1}과 점 E^{-1}에서 만난다. $E^{-1}E=I$이고 $H^{-1}H=I$ 이므로 본원풀이 (18)와 쌍대풀이 (31)이 정확하게 일치한다. $n \neq c$ 이므로 본원공간에서 점 H가 '진짜' 풀이이듯이 쌍대공간에서 점 H^{-1} 가 '진짜' 풀이이다.

〈그림 2〉의 쌍대공간에서 무차별곡선 $K[n]$ 상의 진짜 풀이인 점 H^{-1}를 생각하자. 이 점에서 기울기를 $\hat{q}$로 정의하면 다음과 같이 한계유통시간 균등의 법칙이 성립한다.

$$\hat{q} = \frac{n}{1-n}\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2 \Bigg|_{H^{-1}} \qquad \text{한계유통시간 균등의 법칙} \qquad (32)$$

일반적으로 $1 \neq c+n$ 이므로 식 (20)과 식 (32)에서 $1 \neq \hat{p}\hat{q}$ 이다. 따라서 두 개의 한계유통속도(유통시간) 균등의 법칙인 식 (32)과 식 (20)은 서로 독립이다. '진짜' 풀이 점 H^{-1}의 특징은 $\hat{q}$로 나타낼 수 있으므로 이 점을 $H^{-1}[\hat{q}]$로 표기한다. 〈그림 2〉의 점 $H^{-1}[\hat{q}]$는 〈그림 1〉에서 본원문제의 등속도직선 $Z[n]$과 무차별곡선 $Z[c]$가 만나는 본원중간점 $H[\hat{p}]$에 대응하는 쌍대중간점이다. 두 점은 변수전환에 의해서 정확하게 일치한다. 경제가 쌍대중간점 $H^{-1}[\hat{q}]$에서 쌍대종착점 $F^{-1}[q]$으로 이동할 때 $q = \hat{q}$ 이면 쌍대공간에서도 힉스의 수량효과가 성립할

수 있다.

5. 대체효과

마지막으로 쌍대공간의 대체효과를 살펴볼 차례이다. 본원출발점 정의 (22)의 $J[p_o]$에 대응하는 쌍대 출발점 $J^{-1}[q_o]$의 위치를 조사해야 한다. 본원출발점 $J[p_o]$은 본원공간에서 무차별곡선 $Z[c]$와 식 (21)의 등속도직선 $Z[m_o]$이 만나는 점이다. 따라서 쌍대출발점 $J^{-1}[q_o]$은 반드시 식 (21)의 본원등속도직선 $Z[m_o]$을 변수전환한 다음의 무차별곡선 $K[m_o]$ 상에 위치해야 한다.

$$\frac{1}{K} = \frac{m_o}{K_1} + \frac{1-m_o}{K_2} \qquad \text{무차별곡선 (33) = 등속도직선 (21)}$$

그러나 이것은 식 (30)에서 논의한 쌍대무차별곡선 $K[n]$와 전혀 다른 또 하나의 무차별곡선으로 〈그림 2〉의 점선 $K[m_o]$이다. 가중치 n과 평균유통시간 K로 구성하는 무차별곡선은 $K[n]$만이 유일한데 $K[m_o] \neq K[n]$이 되기 때문이다. 즉 무차별곡선 $K[m_o]$를 무차별곡선 $K[n]$과 비교할 때 평균 유통시간 K는 같으므로 45도 선상의 E^{-1}점에서 서로 교차하지만 가중치는 $m_o \neq n$ 이므로 모든 점에서 기울기가 다른 곡선이다. 따라서 쌍대 출발점 $J^{-1}[q_o]$의 위치는 쌍대중간점 $H^{-1}[\hat{q}]$이 위치하는 "동일" 무차별곡선 $K[n]$ 상에 존재하지 못하고 이와 "다른" 새로운 쌍대무차별곡선 $K[m_o]$에 홀로 떨어져서 위치한다.

새로운 무차별곡선 $K[m_o]$과 등시간직선 $K[c]$가 만나는 점을 선택하여 점 $J^{-1}[q_o]$를 정의하고 그 점에서 접선의 기울기를 q_o로 표기할 수 있다. 실제로 〈그림 2〉에 점선으로 표시한 새 무차별곡선 $K[m_o]$이 공통의 등시간직선 $K[c]$과 만나는 점을 $J^{-1}[q_o]$로 표기하였다. 그러면 쌍대점 $J^{-1}[q_o]$를 쌍대출발점, 쌍대점 $H^{-1}[\hat{q}]$을 쌍대중간점, 쌍대점 $F^{-1}[q]$를 쌍대종착점이라고 부를 수 있다.

이렇게 볼 때 쌍대공간에서 출발점 $J^{-1}[q_o]$과 중간점 $H^{-1}[\hat{q}]$ 사이의 이동은 본원공간에서 출발점 $J[p_o]$과 $H[\hat{p}]$ 사이의 이동과 대수적으로나 기하학적으로나 정확하게 일치한다. 그러나 중요한 차이점이 있다. 본원공간에서 "동일 무차별곡선" 상의 출발점 $J[p_o]$과 중간점 $H[\hat{p}]$ 사이의 이동이 쌍대공간에서는 "동일 등시간직선" $K[c]$ 상의 출발점 $J^{-1}[q_o]$과 중간점 $H^{-1}[\hat{q}]$ 사이의 이동이 된다는 점이다. 따라서 쌍대출발점 $J^{-1}[q_o]$과 쌍대중간점 $H^{-1}[\hat{q}]$은 "동일" 무차별곡선에 위치할 수 없으므로 쌍대공간에서 대체효과를 정의할 수 없다. 다음을 정의한다.

정의 1 (힉스 강대체효과) : 무차별곡선을 정의하는 파라메타(가중치)가 일정하고 위치의 크기(평균치)도 동일한 무차별곡선상의 이동 현상이다.

IV. 힉스 강대체효과와 강수량효과의 불가능성

1. 힉스 강대체효과(strong substitution effect) 불가능성

이상에서 본원공간의 현상을 쌍대공간에서 동일하게 재현하였다. 이 과정에서 확인한 흥미로운 사실은 본원출발점 $J[p_o]$와 본원중간점 $H[\hat{p}]$이 "동일" 무차별곡선 $Z[c]$에 위치할 때, 쌍대출발점 $J^{-1}[q_o]$는 무차별곡선 $K[m_o]$상에 위치하고 이와 "다른" 무차별곡선 $K[n]$상에 쌍대중간점 $H^{-1}[\hat{q}]$이 존재한다는 것이다. 이것은 본원공간에서 성립하는 힉스 강대체효과의 정의가 쌍대공간에서는 불가능함을 뜻하는데 그 역도 성립한다.

정리 1 (힉스 강대체효과 불가능성) : 본원공간에서 평균치 Z와 가중치 c가 일정하게 주어진 "동일" 무차별곡선 $Z[c]$상의 본원출발점 $J[p_o]$에서 본원중간점 $H[\hat{p}]$으로 이동하는 힉스의 본원 강대체효과는 쌍대공간에서 평균치 K와 가중치 n이 일정하게 주어진 "동일" 무차별곡선 $K[n]$상의 이동현상인 쌍대 강대체대체효

과로 정의할 수 없다. 그 역도 성립한다.[2)]

증명: 본원공간에서 "동일" 무차별곡선 $Z[c]$상의 임의의 두 점 $R = [Z_1, Z_2]$과 $R' = [Z_1', Z_2']$ 사이의 이동을 생각하자. 본원공간의 이 이동과 정확하게 일치하는 두 점 $R^{-1} = [K_1, K_2]$과 $(R')^{-1} = [K_1', K_2']$ 사이의 이동을 쌍대공간의 "동일" 무차별곡선 $K[n]$상에서 생각하자. 우리의 목적은 $R = R'$과 $R^{-1} = (R')^{-1}$를 증명하는 것이다. 다음을 정의한다.

$$\frac{Z_2'}{Z_1'} = \lambda' \frac{Z_2}{Z_1}, \qquad \lambda' = \frac{n'}{1-n'} \frac{1-n}{n} \frac{1-c'}{c'} \frac{c}{1-c} \tag{34}$$

먼저 본원공간의 이동부터 조사한다. 본원공간의 "동일" 무차별곡선상의 모든 점에서 c는 $c = c'$로서 일정하므로 다음과 같이 한계유통속도 균등의 법칙이 두 점 R과 R'에서 성립한다.[3)]

$$\hat{p}' = \frac{c}{1-c}\left(\frac{Z_2'}{Z_1'}\right)^2 \Bigg|_{R'}, \qquad \hat{p} = \frac{c}{1-c}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 \Bigg|_{R} \tag{35}$$

그러나 두 점 $R = [Z_1, Z_2]$과 $R' = [Z_1', Z_2']$에서 화폐비율은 다르므로 $n' \neq n$ 이다. 따라서 이와 정확하게 일치하는 한계유통시간 균등의 법칙이 쌍대공간에서는

$$\hat{q}' = \frac{n'}{1-n'}\left(\frac{K_2'}{K_1'}\right)^2, \qquad \hat{q} = \frac{n}{1-n}\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2 \tag{36}$$

인데 이것은 "동일" 무차별곡선 $K[n]$상의 두 점이 아니다. 쌍대공간의 "동일" 무

2) 쌍대공간의 동일 무차별곡선상에서 강대체효과를 정의하면 본원공간의 동일 무차별곡선 상에서 강대체효과를 정의할 수 없다.

3) 가중치 c가 일정하지 않고 변하여도 결과는 동일하다.

차별곡선 $K[n]$상의 두 점 R^{-1}과 $(R')^{-1}$에서는 화폐비율 n이 $n=n'$으로 일정해야 하므로 (36)는 (34)의 도움으로 $c=c'$일 때

$$\left(\frac{1}{\lambda'}\right)\hat{q}' = \frac{n}{1-n}\left(\frac{K_2'}{K_1'}\right)^2 \Bigg|_{(R')^{-1}} , \qquad \hat{q} = \frac{n}{1-n}\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2 \Bigg|_{R^{-1}} \tag{37}$$

이 되어야만 양 공간에서 각각의 "동일" 무차별곡선상의 이동은 정확하게 일치한다. 그 결과 (34)~(37)에서

$$\frac{\hat{p}'}{\hat{q}'} = (\lambda')^3 \frac{\hat{p}}{\hat{q}} , \qquad \hat{p}' = (\lambda')^2 \hat{p} , \qquad \hat{q}' = \left(\frac{1}{\lambda'}\right)\hat{q} \tag{38}$$

이다.

이번에는 쌍대공간을 먼저 조사한다. 쌍대공간의 "동일" 무차별곡선상의 모든 점에서 n는 $n=n'$으로 일정하므로 다음과 같이 한계유통속도 균등의 법칙이 두 점 R^{-1}과 $(R')^{-1}$에서 성립한다.4)

$$\hat{q}' = \frac{n}{1-n}\left(\frac{K_2'}{K_1'}\right)^2 \Bigg|_{(R')^{-1}} , \qquad \hat{q} = \frac{n}{1-n}\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2 \Bigg|_{R^{-1}} \tag{39}$$

그러나 두 점 $R^{-1}=[K_1, K_2]$과 $(R')^{-1}=[K_1', K_2']$에서 거래비율이 다르므로 $c' \neq c$ 이다. 따라서 이와 정확하게 일치하는 한계유통속도 균등의 법칙이 본원공간에서는

$$\hat{p}' = \frac{c'}{1-c'}\left(\frac{Z_2'}{Z_1'}\right)^2 , \qquad \hat{p} = \frac{c}{1-c}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 \tag{40}$$

인데 이것은 본원공간의 "동일" 무차별곡선 $Z[c]$상의 두 점이 아니다. 본원공간의

4) 가중치 n이 일정하지 않고 변하여도 결과는 동일하다.

"동일" 무차별곡선 $Z[c]$상의 두 점 R과 R'에서는 거래비율 c가 $c=c'$로서 일정해야 하므로 (40)는 (34)의 도움으로 $n=n'$ 일 때

$$\lambda'\hat{p}'=\frac{c}{1-c}\left(\frac{Z_2'}{Z_1'}\right)^2\Bigg|_{R'}\ ,\qquad \hat{p}=\frac{c}{1-c}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2\Bigg|_{R}\tag{41}$$

이 되어야만 양 공간에서 각각의 "동일" 무차별곡선상의 이동은 정확하게 일치한다. 그 결과 (39)~(41)에서

$$\frac{\hat{p}'}{\hat{q}'}=(\lambda')^3\frac{\hat{p}}{\hat{q}}\ ,\qquad \hat{p}'=(\lambda')\,\hat{p}\ ,\qquad \hat{q}'=\left(\frac{1}{\lambda'}\right)^2\hat{q}\tag{42}$$

이다. 그러므로 (38)과 (42)에서

$$\lambda'=1\ ,\qquad \hat{p}'=\hat{p}\ ,\qquad \hat{q}'=\hat{q}\tag{43}$$

이다. 따라서 (34)~(36)와 (43)에서 $R=R'$과 $R^{-1}=(R')^{-1}$이다. 증명 끝.

2. 힉스 강수량효과(strong quantity effect) 불가능성

본원과 쌍대 양 공간에서 대수적으로 결과가 일치하도록 힉스 강대체효과의 정의가 불가능하면 힉스 강수량효과도 정의할 수 없다. 여기서 "강(strong)"이라는 표현은 두 무차별곡선의 접선의 기울기가 "동일"하다는 뜻이다.[5] 따라서 다음을 정의한다.

5) 힉스의 수량효과는 두 개의 다른 무차별곡선 사이에서 기울기를 일정하게 유지한 채 일어나는 이동을 말한다. 이 같은 강한 조건을 유지하는 이동을 강수량효과라고 부르자. 무차별곡선의 한 점에서 접선의 기울기는 유일하므로 두 무차별곡선에서 기울기가 동일한 점은 각각 유일하다. 따라서 하나의 무차별곡선의 한 점과 강수량효과로 대응할 수 있는 점은 다른 하나의 무차별곡선 마다 유일하게 존재한다.

정의 2 (힉스 강수량효과): 하나의 무차별곡선의 한 점에서 이 점의 접선의 기울기와 동일한 기울기를 가진 다른 하나의 무차별곡선상의 한 점으로 이동하는 현상이다.

정의 3 (힉스 약수량효과): 하나의 무차별곡선의 한 점에서 이 점과 유일하게 1대 1의 관계를 갖는 다른 무차별곡선상의 한 점으로 이동하는 현상이다.

힉스 강수량효과가 불가능한 것은 쌍대공간을 이용하여 직관적으로 설명할 수 있다. 본원공간에서 무차별곡선이 $Z[c]$에서 $V[a]$로 이동할 때 쌍대공간에서는 변수전환에 의해 등시간직선이 $K[c]$에서 $k[a]$로 이동한다. 등시간직선 $K[c]$의 기울기는 $-\frac{c}{1-c}$이고 등시간직선 $k[a]$의 기울기는 $-\frac{a}{1-a}$인데 $a \neq c$이므로 두 기울기는 동일하지 않다. 따라서 쌍대공간에서는 동일한 기울기를 갖고 이동할 수 없다. 본원공간의 힉스 강수량효과를 쌍대공간에서 정의할 수 없고 그 역도 성립한다는 것은 기울기 p 및 q를 각각 기울기 $\hat{p}$ 및 $\hat{q}$ 와 비교해 보면 확실해 진다.

정리 2 (힉스 강수량효과 불가능성): 본원과 쌍대 두 공간에서 일반적으로 $a \neq c$와 $m \neq n$ 이고 평균유통속도 Z가 V 로 변할 때 하나의 무차별곡선상의 중간점 H에서 $Z_1 \neq Z_2$이고 "동시에" 다른 무차별곡선상의 종착점 F에서 $V_1 \neq V_2$가 되도록 힉스의 강수량효과를 성립시키는 "동일" 기울기 $\hat{p}=p$와 $\hat{q}=q$는 양 공간에서 각각의 두 무차별곡선상에 존재하지 않는다.

증명: 증명을 위해 지금까지 논의하였던 방정식 가운데 경제가 본원공간에서 $\hat{p}=p$ 하의 $H[\hat{p}] \rightarrow F[p]$로, 쌍대공간에서 $\hat{q}=q$ 하의 $H^{-1}[\hat{q}] \rightarrow F^{-1}[q]$로 이동하는 강수량효과를 나타내는 독립 방정식만 선택한다. 방정식 앞에 각각의 이름도 표기하였다. 증명을 위한 연립방정식 체계 I는 다음과 같다.

〈연립방정식 체계 I〉

$V[a] \quad \frac{1}{V} = \frac{a}{V_1} + \frac{1-a}{V_2}$ (9) $\quad V[m] \quad V = mV_1 + (1-m)V_2$ (7)

$F[p] \quad \frac{a}{1-a}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \Big|_F = p$ (12) $\quad F^{-1}[q] \quad \frac{m}{1-m}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 \Big|_{F^{-1}} = q$ (27)

$Z[c] \quad \frac{1}{Z} = \frac{c}{Z_1} + \frac{1-c}{Z_2}$ (17) $\quad Z[n] \quad Z = nZ_1 + (1-n)Z_2$ (16)

$H[\hat{p}] \quad \frac{c}{1-c}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 \Big|_H = \hat{p}$ (20) $\quad H^{-1}[\hat{q}] \quad \frac{n}{1-n}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 \Big|_{H^{-1}} = \hat{q}$ (32)

식 (27)과 식 (32)에서 본원문제와 쌍대문제 사이에 변수전환 관계를 나타내는 $k_1V_1 \equiv 1$, $k_2V_2 \equiv 1$, $K_1Z_1 \equiv 1$, $K_2Z_2 \equiv 1$을 이미 사용하였다. 왼쪽 네 개의 식은 본원공간의 식들이고 오른쪽 네 개의 식은 쌍대공간의 식들이다. 연립방정식 체계 I에 두 개의 힉스 강수량효과(strong quantity effect)의 정의

$$\hat{p} = p \ , \qquad \hat{q} = q \qquad \text{강수량효과 정의} \tag{44}$$

를 추가하면 10개의 독립방정식이 주어진다. 미지수는 14개 (V_1, V_2, Z_1, Z_2, m, n, p, $\hat{p}$, q, $\hat{q}$, a, c, V, Z)이다. 이 가운데 10개의 미지수를 나머지 4개의 미지수의 함수로 표현할 수 있다. 풀이는 다음과 같다.

$$V_1 = V_2 \quad \text{와} \quad Z_1 = Z_2 \tag{45}$$

따라서 (12)와 (20), (27)과 (32)에 의해서

$$a = 1 - a \quad \text{와} \quad c = 1 - c \tag{46}$$

도 성립한다. 풀이 (45)에 의하면 $a \neq c$ 와 $m \neq n$ 하에서 본원공간 강수량효과

의 정의 $\hat{p}=p$ 와 더불어 쌍대공간 강수량효과의 정의 $\hat{q}=q$ 가 성립하려면 풀이는 반드시 자명한 풀이가 되어야 한다. 이것은 자명한 풀이를 배제한다고 설정한 식 (11)과 식 (19)의 전제인 $V_1 \neq V_2$와 $Z_1 \neq Z_2$에 모순된다. 또한 (46)은 전제 $a \neq c$및 $m \neq n$와 모순된다. 증명 끝.

V. 힉스 약수량효과 가능성

본원공간과 쌍대공간을 "동시에" 만족시키는 힉스 강수량효과의 정의가 일반적으로 불가능하므로 본원중간점 $H(\hat{p})$에서 본원종착점 $F(p)$로 이동할 때 $\hat{p} \neq p$이고 "동시에" 쌍대중간점 $H^{-1}[\hat{q}]$에서 쌍대종착점 $F^{-1}[q]$로 이동할 때 $\hat{q} \neq q$이다. 이때 본원공간에서 하나의 무차별곡선상의 중간점 $H(\hat{p})$의 접선의 기울기 $\hat{p}$와 또 하나의 다른 무차별곡선상의 종착점 $F(p)$의 접선의 기울기 p가 "유일한" 관계를 갖고 이동하는 현상이 본원 약수량효과이고, 쌍대공간에서 하나의 무차별곡선상의 중간점 $H^{-1}[\hat{q}]$의 접선의 기울기 $\hat{q}$와 또 하나의 다른 무차별곡선상의 종착점 $F^{-1}[q]$의 접선의 기울기 q가 "유일한" 관계를 갖고 이동하는 현상이 쌍대 약수량효과이다.

약수량효과의 정의를 사용하면 연립방정식 체계 I에 불가능한 2개의 강수량효과 정의 $\hat{p}=p$와 $\hat{q}=q$ 대신, $p \neq \hat{p}$를 나타내는 p와 $\hat{p}$ 사이의 본원 약수량효과와 $q \neq \hat{q}$을 나타내는 q와 $\hat{q}$ 사이의 쌍대 약수량효과를 정의하는 2개의 숨겨진 독립방정식(missing equations)로 대체할 수 있다. 이들 방정식의 정체를 밝히기 위하여 먼저 $a \neq c$, $m \neq n$와 $V \neq Z$일 때 두 개의 실수를 정의한다.

$$\Delta = \frac{(1-a)V-(1-c)Z}{aV-cZ}, \qquad \Omega = \frac{(1-m)k-(1-n)K}{mk-nK} \tag{47}$$

정의 (47)는 각각 〈그림 1〉의 본원공간에서 중심의 이동거리 O_ZO_V의 기울기 Δ와 〈그림 2〉의 쌍대공간에서 중심의 이동거리 O_kO_K의 기울기 Ω를 나타낸다.

정리 3 (힉스 약수량효과 가능성): 본원공간의 무차별곡선 $V[a]$상에 본원종착점 $F[p]$이 주어져 있다. 이 점의 접선의 기울기는 p이다. 본원공간의 무차별곡선 $Z[c]$상에 본원 중간점 $H[\hat{p}]$의 위치를 생각하자. 이 점의 접선의 기울기는 $\hat{p}$이다. 그러면 두 개의 본원점 $F[p]$과 $H[\hat{p}]$ 사이에는 $W[p\,\hat{p}]$로 표기되는 본원 약수량효과의 방정식

$$p = \frac{1}{\hat{p}}\ \frac{a}{1-a}\,\frac{c}{1-c}\,\Delta^2 \tag{48}$$

가 유일하게 존재한다. 본원종착점 $F[p]$과 대수적으로 일치하는 쌍대종착점 $F^{-1}[q]$이 쌍대공간의 무차별곡선 $k[m]$상에 존재한다. 이 점의 접선의 기울기는 q이다. 본원중간점 $H[\hat{p}]$과 대수적으로 일치하는 쌍대중간점 $H^{-1}[\hat{q}]$이 쌍대공간의 무차별곡선 $K[n]$상에 존재한다. 이 점의 접선의 기울기는 $\hat{q}$이다. 그러면 두 개의 쌍대점 $F^{-1}[q]$과 $H^{-1}[\hat{q}]$ 사이에는 $W[q\,\hat{q}]$로 표기되는 쌍대약수량효과의 방정식

$$q = \frac{1}{\hat{q}}\,\frac{m}{1-m}\,\frac{n}{1-n}\,\Omega^2 \tag{49}$$

가 유일하게 존재한다.

증명: 실수공간에서 $W^2 = X^2 Y^2$ 가 성립하는 실수 W, X, Y 가 항상 존재하므로 정의 (47)에 의하여

$$\Delta^2 = \left(\frac{1-a}{a}\,\frac{1-c}{c}\right)^2 \hat{\Delta}^2, \qquad \Omega^2 = \left(\frac{1-m}{m}\,\frac{1-n}{n}\right)^2 \hat{\Omega}^2 \tag{50}$$

를 만족하는 실수 $\widehat{\Delta}=\dfrac{\left(\dfrac{k}{1-a}\right)-\left(\dfrac{K}{1-c}\right)}{\left(\dfrac{k}{a}\right)-\left(\dfrac{K}{c}\right)}$ 와 $\widehat{\Omega}=\dfrac{\left(\dfrac{V}{1-m}\right)-\left(\dfrac{Z}{1-n}\right)}{\left(\dfrac{V}{m}\right)-\left(\dfrac{Z}{n}\right)}$ 가 반드시 존재한다. 동일한 실수공간에서 동일한 W에 대해 $W^2=x^2y^2$ 가 성립하는 실수 $x \neq X$와 $y \neq Y$ 도 항상 존재하므로 식 (50)에 식 (12), 식 (20), 식 (27), 식 (32)를 대입할 때

$$\Delta^2=\left(\frac{V_2{}'}{V_1{}'}\right)^2\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 \quad , \qquad \Omega^2=\left(\frac{k_2{}''}{k_1{}''}\right)^2\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2 \tag{51}$$

를 만족하는 실수 $\dfrac{V_2{}'}{V_1{}'}$ 와 $\dfrac{k_2{}''}{k_1{}''}$ 도 항상 존재한다. 여기서

$$\frac{V_2{}'}{V_1{}'}=(\mu')\frac{V_2}{V_1} \quad , \qquad \frac{k_2{}''}{k_1{}''}=\left(\frac{1}{\mu''}\right)\frac{k_2}{k_1} \tag{52}$$

이고

$$\mu'=\frac{V_2}{V_1}\frac{Z_2}{Z_1}\frac{\widehat{\Delta}}{p\hat{p}} \quad , \qquad \frac{1}{\mu''}=\frac{k_2}{k_1}\frac{K_2}{K_1}\frac{\widehat{\Omega}}{q\hat{q}} \tag{53}$$

이다. 식 (50) ~ (53)를 정리하면

$$p\hat{p}=\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\left(\frac{1}{\mu'}\frac{V_2{}'}{V_1{}'}\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2, \ q\hat{q}=\frac{m}{1-m}\frac{n}{1-n}\left(\mu''\frac{k_2{}''}{k_1{}''}\frac{K_2}{K_1}\right)^2 \tag{54}$$

를 얻는다. (52)의 첫째 식은 본원공간에서 "동일" 무차별곡선상의 두 점 $S=[V_1, V_2]$와 $S'=[V_1{}', V_2{}']$의 관계이다. 이 본원관계와 정확하게 일치하는 쌍대관계가 쌍대공간에서 두 점 $S^{-1}=[k_1, k_2]$와 $(S')^{-1}=[k_1{}', k_2{}']$ 사이에 존재한다. 이 두 개의 쌍대점은 "동일" 무차별곡선상에 존재해야 하므로 정리 1에

의하여 $\mu' = 1$ 이다. 마찬가지로 (52)의 둘째 식은 쌍대공간에서 “동일” 무차별곡선상의 두 점 $S^{-1} = [k_1, k_2]$와 $(S'')^{-1} = [k_1'', k_2'']$의 관계이다. 이 쌍대관계와 정확하게 일치하는 본원관계가 본원공간에서 두 점 $S = [V_1, V_2]$와 $S'' = [V_1'', V_2'']$ 사이에 존재한다. 이 두 개의 본원점은 “동일” 무차별곡선상에 존재해야 하므로 정리 1에 의하여 $\mu'' = 1$ 이다. 이 결과를 (51)~(52)과 (54)에 적용하면

$$p\hat{p} = \frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\Delta^2 \quad , \qquad q\hat{q} = \frac{m}{1-m}\frac{n}{1-n}\Omega^2 \tag{55}$$

이 된다. 이것이 식 (48)~(49)이다. 증명 끝.[6]

VI. 유통속도의 분할

1. 유통속도 분할의 연립방정식 체계

힉스 약수량효과를 정의하는 식(48)과 식(49)이 두 개의 숨겨진 방정식(missing equations)이다. 이들은 각각 독립방정식이므로 이제 우리는 유통속도를 분할하는데 필요한 모든 독립방정식을 유도하였다. 강수량효과 정의식 (44)대신 약수량효과의 식 (48)과 식 (49)를 연립방정식 체계 I에 추가하면 분할을 위한 연립방정식 체계 II가 완성된다.

2. 풀이

연립방정식 체계 II 역시 10개의 독립방정식과 14개의 미지수(V_1, V_2, Z_1, Z_2, m, n, p, $\hat{p}$, q, $\hat{q}$, a, c, V, Z)로 구성되어 있다. 모든 변수는 일반

6) 본문의 증명과 전혀 다른, 그러나 지나치게 긴 방법의 증명을 통해서 동일한 결과에 도달하는 것을 확인할 수 있다.

균형체계에서 결정되지만 그 결과는 실제로 시장에서 관찰되지 않는다. 이 가운데 (a, c, V, Z)가 일반균형 체계에서 그의 결정 방정식이 추가적으로 각각 주어지면 14개의 방정식이 되므로 방정식의 수와 미지수의 수와 일치하여 풀이가 주어진다. 다행히도 (a, c, V, Z)는 결정 방정식 대신 일반적으로 관찰할 수 있는 알려진 정보이므로 '수학적'으로는 파라메타로 생각할 수 있다. 따라서 나머지 10개의 미지수(V_1, V_2, Z_1, Z_2, m, n, p, $\hat{p}$, q, $\hat{q}$)를 관찰 가능한 4개의 파라메타(a, c, V, Z)의 함수로 표현할 수 있다. 이로써 연립방정식체계 II에는 독립방정식의 수와 미지수의 수가 일치하므로 풀이가 존재한다. 풀이는 두 개이다. 그러나 $m = \dfrac{M_1}{M}$ 은 양수이어야 하므로 종착점 $F[p]$에서 풀이는 다음과 같다.

$$\frac{M_1}{M}\bigg|_{F(p)} = \frac{\left(\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\mid\varDelta\mid\right)^{1/2}}{1+\left(\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\mid\varDelta\mid\right)^{1/2}} - G \tag{56}$$

여기서

$$G = \frac{\left(\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\mid\varDelta\mid\right)^{1/2}\left[(1-D^{1/2})+\left(D-\frac{V}{Z}\right)^{1/2}\right]}{1-\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\mid\varDelta\mid} \tag{57}$$

$$D=\frac{1-a}{a}\frac{1-c}{c}\frac{1}{\mid\varDelta\mid}\left[\frac{1}{2}\frac{\mid\varDelta\mid}{1+\mid\varDelta\mid}\left(\frac{V}{Z}-1\right)\left(1+\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\right)\right]^2+\frac{V}{Z} \tag{58}$$

이때 식 (56)에 대하여 점검조건 (8)

$$1 > m > 0$$

이 성립한다 (증명생략). 화폐분배비율 m 과 파라메타(a, c, V, Z)의 관계는 사전적으로 알려져 있지 않다. 이로부터 종착점 $F[p]$에서 유통속도는

$$\frac{V_1}{V}\Bigg|_{F(p)} = \frac{a\left[1+\left(\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\mid \Delta \mid\right)^{½}\right]}{(1-G)\left[\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\mid \Delta \mid\right]^{½} - G} \tag{59}$$

$$\frac{V_2}{V}\Bigg|_{F(p)} = \frac{(1-a)\left[1+\left(\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\mid \Delta \mid\right)^{½}\right]}{1+G\left[1+\left(\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\mid \Delta \mid\right)^{½}\right]} \tag{60}$$

으로 분할된다. 따라서 종착점 F에서 $V_1 \doteqdot V_2$ 이다. 이때 $V_1 > 0$ 과 $V_2 > 0$ 도 성립한다(증명생략). 마지막으로 (59)~(60)을 체계 II에 대입하면 중간점 H에서 $Z_1 \doteqdot Z_2$ 이다(증명 생략).

이때 중요한 결과는 출발점 $J[p_o]$의 위치는 풀어지지 않는다(증명생략). 그 까닭은 출발점 $J[p_o]$의 위치는 화폐비율 m_o으로 정의되는데 이 미지수는 연립방정식 체계 II에 속하지 않기 때문이다. 구체적으로 설명하면 종착점과 약수량효과로 유일하게 대응하는 점은 중간점뿐이므로 출발점과 종착점 사이에는 약수량효과가 성립하지 않고 따라서 이들 사이에는 약수량방정식이 존재하지 않는다. 따라서 방정식의 부족으로 화폐비율 m_o는 결정되지 않는다. 출발점 $J[p_o]$의 위치는 종착점 $F[p]$의 위치를 구하는 동일한 방법으로 그 이전의 관찰 가능한 파라메타를 사용하여 독립적으로 구할 수 있다.

각 부문별 유통속도(V_1, V_2)와 그를 결정하는 파라메타(a, c, V, Z)의 관계는 사전적으로 알려져 있지 않다. 화폐량의 분할 (59)과 유통속도의 분할 (62)~(63)의 공식이 복잡하지만 컴퓨터의 도움으로 실제적인 차원에서 기계적으로 간단히 계산할 수 있는 유용한 수준이다.

VII. 맺는말

본 논문은 아무 가정 없이 유통속도의 분할이 수학적으로 가능함을 보여 주었다. 이것은 거시변수를 미시변수로 분할할 수 있음을 보인 최초의 예에 불과하다. 이

가능성은 유통속도의 양면성에 의존하였다. 단위 시간의 유통속도는 단위 회전의 유통시간이라는 쌍대성을 갖고 있다. 이 양면성은 기묘하게도 본원문제에서 나타나는 유통속도의 특성이 쌍대문제에서 유통시간의 다른 특성으로 나타난다. 강수량효과와 강대체효과의 불가능성이 이 특성의 대표적인 현상이다. 유통속도의 분할은 이분법(bifurcation)이다. 이분법으로 유통속도를 실물 대 금융, 부문별, 지역별, 산업별, 상품별로 분할할 수 있다. 이분법을 연속 이용하면 이론적으로 무한하게 분할할 수 있다.

유통속도뿐만 아니라 다른 거시변수를 동일한 방법으로 분할하면 미시변수로 사용하는데 유용하다. 그러기 위해서는 거시변수의 쌍대성을 먼저 찾아내야 한다. 이 작업은 가능하다. 대개의 경제변수는 양면성을 갖는다. 수량변수는 가격변수를 반영하고 가격변수는 수량변수를 반영한다. 수량변수 자체도 마찬가지이다. 모든 수량변수의 측정단위는 2차원의 요소를 갖고 있다. 유통속도만 하더라도 단위시간의 회전수는 곧 단위회전의 시간을 내포하고 있다. 단위시간에 측정하는 모든 수량변수는 그의 역수로써 단위수량의 시간이라는 개념을 그림자로 갖고 있다. 변수의 분할은 이래서 가능하다.

■ 참고문헌

1. Bain, K. and P. G. Howells, "The Income and Transactions Velocities of Money," *Review of Social Economy*, 1991, pp. 383~395.
2. Bank for International Settlements, *Statistics on Payment Systems in the Group of Ten Countries*, Basle: Bank for International Settlements, 1996.
3. ——, *Central Bank Survey of Foreign Exchange and Derivative Market Activity*, Basle: Bank for International Settlements, 1999.
4. Boeschoten, W. J. and M. M. G. Fase, *The Volume of Payments and the Informal Economy in the Netherlands 1965~1982*, Monetary Monographs no. 1, Amsterdam: de Netherlands Bank, and Dordrecht: Nijhoff, 1984.
5. Bordo, M. D., *The Long-run Behavior of the Velocity of Circulation*, Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
6. ——, "Equation of Exchange," J. Eatwell et al. (eds.), *Money, the new Palgrave series*, New York: Norton, pp. 151~156.

7. Cramer, J.S. and G.M.Reekers, "Money Demand by Sector," *Journal of Monetary Economics* 2(1), January, 1976, pp.99~112.

8. ——, "The Work Money Does - The Transaction Velocity of Circulation of Money in the Netherlands, 1950~1978," *European Economic Review*, 1981, pp.307~326.

9. ——, "The Volume of Transactions and Payments in the United Kingdom, 1968-1977," *Oxford Economic Papers* 33(2), July, 1981, pp.234~255.

10. ——, "Velocity of Circulation," J. Eatwell et. al. (eds.), *Money, the new Palgrave series*, New York: Norton, 1989, pp.328~332.

11. Davidson, P., "Are Grains of Sand in the Wheels of International Finance Sufficient to do the Job when Boulders are often Required?" *Economic Journal 107*, 1997, pp.671~686.

12. des Essars, P., "La vitesse de la circulation de la monnaie," *Journal de la Societe de Statistique de Paris*, vol. 36, 1895.

13. Eichengreen and Wyplosz, "The Unstable EMS," *Brookings Papers on Economic Activity*, 1993, pp.51~143.

14. Fisher, I., "A Practical Method for Estimating the Velocity of Circulation of Money," *Journal of the Royal Statistical Society* 72, September 1909, pp.604~611.

15. ——, *The Purchasing Power of Money*, New York: Macmillan, 1911.

16. Friedman, M., "Quantity Theory of Money," J. Eatwell et. al. (eds.), *The New Palgrave A Dictionary of Economics*, vol. 4, London: Macmillan, 1987, pp.3~20.

17. Howells, P.G. and I.B-F. Mariscal, "An Explanation for the Recent Behavior of Income and Transaction Velocities in the United Kingdom," *Journal of Post Keynesian Economy*, 1992, pp.367~388.

18. Keynes, J.M., *A Treatise on Money*, London: Macmillan, 1930.

19. ——, *The General Theory of Interest, Employment and Money*, London: Macmillan, 1936.

20. Laurent, R.D., "Currency Transfers by Denomination," Ph.D Dissertation, University of Chicago, 1970.

21. Miller, R.D., "The Dynamic Properties of a Two Region Model of the Regional Impact of Monetary Policy in the United States," *Journal of Economics and Business*, 1979, pp.90~102.

22. Snyder, C., "New Measures in the Equation of Exchange," *American Economic Review*, 1924.

23. ——, "On the Statistical Relation of Trade, Credit, and Prices," *Revue de l'Institut International de Statistique* 2, October 1934, pp.278~291.

24. Tobin, J., "On the Efficiency of the Financial System," *Lloyds Bank Review*, July 1984, pp.1~15.

25. Weinberg, J.A., "Selling Federal Reserve Payment Services: One Price Fits All?" *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, Fall 1994, pp.1~24.