# 日日 株式價格에 대한 카오스 檢定*

白 雄 基** · 黃 潤 宰***

논 문 초 록 :

1980년대 중반 이후 경제학 문헌에서는 경제자료의 동태적 성질이 카오스적 특성을 가질 수 있다는 가능성에 대해 학자들의 많은 관심이 집중되어 오고 있다. 그러나 경제자료에 있어서 카오스적 특성의 경험적 존재 여부에 관해서는 학자들의 견해가 일치하지 않는다. 이러한 견해불일치의 가장 근본적 이유는 얼마 전까지만 해도 카오스존재를 직접적으로 검정할 수 있는 방법이 개발되지 않았다는 데 있다. 본고는 카오스의 존재를 직접 검정하기 위하여 최근 개발된 Whang-Linton방법을 종합주가지수를 비롯한 20종의 일일 주식가격에 적용함으로써 주식시장에서 카오스의 존재를 검정하였다. BDS통계량을 비롯한 간접검정법은 일부 종목별 주식가격의 비선형성을 시사한 바 있으나, 직접검정법인 Whang-Linton법은 종합주가지수를 비롯한 모든 대상종목에 카오스적인 증거가 없다는 사실을 입증하였다.

핵심주제어 : Chaos, Lyapunov지수, Whang-Linton검정법
경제학문헌목록 주제분류 : C4

## Ⅰ. 서 론

최근 경제학 문헌에서는 경제자료의 동태적 성질이 카오스(chaos)적 특성을 가질 수 있다는 가능성에 대해 학자들의 많은 관심이 집중되어 오고 있다.[1) ] 이러

---

* 본 논문에 대해 좋은 논평을 주신 익명의 심사위원들께 감사드린다.

** 상명대학교 경상행정학부 부교수
*** 이화여자대학교 경제학과 부교수

1) *Journal of Applied Econometrics*(1994)와 *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B(1992)의 특집호 참조. 카오스 시스템은 초기민감성을 가지기 때문에 장기예측이 불가능하지만 임계시간 이전 시간대에서는 어느 정도 단기예측이 가능하다. 카오스가 관심의 대상이 된 큰 이유는 카오스의 data generating process는 일종의 확정과정(deterministic process)이지만 그로부터 형성된 관측치들은 random process와 전혀 구별되지 않는 특성을 가지기 때문이다.

한 관심은 비교적 단순한 비선형 동태체계(nonlinear dynamic system)가 매우 복잡하고 예측하기 힘든 결과를 낳을 수 있다는 카오스과정의 특징에 기인한 것으로 볼 수 있다. 그러나 경제자료에 있어서 카오스적 특성의 경험적 존재여부에 관해서는 학자들의 견해가 일치하지 않는다(Barnett and Chen, 1988; Ramsey *et al.*, 1990; Dechert and Gencay, 1992; Barnett *et al.*, 1997 참조). 이러한 견해불일치의 가장 근본적 이유는 최근까지 카오스존재를 직접적으로 검정할 수 있는 방법이 개발되지 않았다는 데 있다. 그러나 최근의 Whang and Linton(1998)의 연구결과는 카오스의 존재를 직접적으로 검정할 수 있는 계기를 마련하였다. 본 논문의 목적은 종목별 일일 주식가격의 카오스존재를 검정하는 데 있다. 이를 위해 백웅기(1997b)에서 사용되었던 방법과 더불어 Whang and Linton(1998)의 연구결과 얻어진 Lyapunov지수(exponent)검정법을 이용한다.

기존 문헌에서 카오스의 존재를 검정하는 데 널리 사용되는 방법으로는 BDS검정법(Brock *et al.*, 1996) 등이 있다. 그러나 BDS검정법은 귀무가설이 카오스가 아니라 시계열이 상호독립적이라는 데 카오스의 검정법으로서 한계가 있다. 즉, BDS검정통계량은 카오스과정이 참모형일 때 그 분포가 알려져 있지 않으며, 상호독립적인 시계열이 참모형일 때만 그 분포가 알려져 있는 것이다. 따라서 BDS검정결과는 카오스의 존재 여부와 아무런 관련이 없는 것으로 볼 수 있다.[2)]

그럼에도 불구하고 지금까지 BDS검정법은 해당 시계열이 보유하고 있는 것으로 알려진 선형 및 비카오스적 비선형 구조를 제거한 이후에 얻어진 잔차항을 대상으로 상호독립성에 대한 추가적인 검정을 실시함으로써 카오스과정에 대한 간접적인 검정방법으로 흔히 사용되어 왔다.[3)] 원래 시계열자료가 카오스적 특성을 보유하고 있는 경우에는 AR를 비롯한 선형 및 GARCH(Bollerslev, 1986)와 같은 비선형성을 제거한다고 하더라도 잔차항에 여전히 카오스적 특성이 남아있기 때문이다. 그러나 BDS검정법은 카오스에 대한 직접 검정방법이 아니기 때문에 잔차항에 의존한 카오스검정법으로는 분명히 한계가 있다.

카오스의 존재를 직접적으로 검정하기 위해서는 카오스를 어떻게 정의하느냐 하는 문제에 직면하게 된다. 여러 학자들이 카오스를 서로 다른 방법으로 정의하

2) 다시 말하면 귀무가설 수락은 카오스의 비존재를 의미하지만, 귀무가설 기각이 곧 카오스의 존재를 의미하지는 않는다. BDS검정법과 기존의 다른 검정법의 한계에 관한 보다 자세한 논의는 Barnett *et al.*(1997) 참조.

3) 이러한 방법을 잔차의존형 검정법(residual based test)이라고 한다.

고 있지만 대부분의 학자들은 카오스를 '초기조건에의 민감성'으로 정의하는데 동의하고 있다. Lyapunov지수는 이러한 '초기조건에의 민감성'을 측정하기 위한 한 지표이다. 예를 들어, Nychka *et al.*(1992)는

> *"양의 Lyapunov지수값을 가지는 제한적 체계는 곧 카오스의 실용적 의미에서의 정의이다(A bounded system with a positive Lyapunov exponent is one operational definition of chaotic behaviour.)."*

라고 정의하였다. 이러한 카오스의 정의는 관측자료가 잡음(noise)을 내포하고 있는 경우도 적용될 수 있다는 장점을 가진다. 즉, 카오스를 비확률적 비선형체계(deterministic nonlinear system)의 동태적 성질로 국한하여 보지 않고, 체계의 비확률성 또는 확률성의 구분을 무시하고 체계가 얼마나 초기조건에 민감한가를 판단하는 것이야말로 카오스의 원래 정의에 부합하는 것이다. 특히 경제자료와 같이 관측오차를 포함할 수밖에 없는 경우 자료가 순수하게 완전한 비확률적 체계로부터 발생한 것이라고 보는 데는 무리가 있을 것이다. 잡음의 존재를 허용하는 카오스는 최근 문헌에서 이른바 noisy chaos라는 개념으로 통용되고 있다. 따라서 noisy chaos는 확률적 비선형체계의 특성으로 볼 수 있다.[4)]

Lyapunov 지수를 추정하기 위한 전통적 방법으로는 이른바 Wolf algorithm (Wolf *et al.*, 1985)이라는 직접 추정법이 있다. 그러나 이 방법은 자연과학에서 볼 수 있는 실험자료와 같이 자료수가 매우 많으며 자료에 잡음이 거의 없을 경우를 제외하고는 적용되기가 힘들다는 단점이 있다.[5)] 한편 Jacobian추정법은 이러한 단점을 잘 극복하는 것으로 알려져 있다. 그 중에서도 Nychka *et al.*(1992)에 의해 개발된 추정법은 Jacobian의 비모수적 추정을 통해 Lyapunov지수를 추정하는 방법으로서 자료가 잡음을 포함하거나 자료의 수가 그리 크지 않더라도 비교적 정확한 추정을 가능케 한다. 이 Lyapunov지수추정량과 관련해서 McCaffrey *et al.*(1992)는 추정량의 일치성을 보였으며, Whang and Linton (1998)은 참모형이 카오스과정일 때 적절히 표준화된 추정량이 점근적으로 정규분포를 가진다는 사실을 보였다. 이러한 결과는 카오스의 존재를 직접적으로 검정할 수 있는 계기가 되었다고 볼 수 있다.

---

4) 카오스와 확률성의 관계에 대한 보다 자세한 논의는 Wegman(1988) 참조. Noisy Chaos를 이용한 연구로는 Chan and Tong(1994)과 Cheng and Tong(1992) 참조.

5) 구체적 논의는 이하 제Ⅱ절의 논의 참조.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제Ⅱ절에서는 20개 종목의 일일 주가수익률에 대하여 Hurst지수, Correlation Dimension 및 BDS 통계량 분석을 실시함으로써 자료의 특성을 사전 조사한다. 제Ⅲ절에서는 Lyapunov지수의 개념을 정의하고 추정방법을 설명하며, 제Ⅳ절에서는 제Ⅱ절과 동일한 자료를 가지고 Lyapunov지수의 실증분석 결과를 제시한다. 마지막으로 제Ⅴ절에서는 본고의 연구결과를 요약한다.

## Ⅱ. 종목별 일일 주가수익률의 특성

이 장에서는 종목별 일일 주가수익률 자료가 가지고 있는 특성을 조사한다. 본 연구의 관심은 주가수익률이 카오스과정으로부터 생성되었는지 알기 위해 주가수익률의 Lyapunov지수를 계산하고 추정치에 대한 통계적 검정을 실시하는 데 있지만, 지금까지 주가수익률에 관련된 문헌에서는 Hurst지수, Correlation Dimension, BDS통계량이 카오스를 비롯한 각종 비선형성을 간접적으로 검정하는 방법들이 통용되어 왔다. 이러한 관점에서 본 연구는 위에 지적한 세 가지 통계량을 조사한 후 제Ⅳ절의 Lyapunov지수 검정결과와 비교하려고 한다.[6)]

### 1. Hurst지수

R/S분석은 Hurst가 시간이 흐름에 따라 평균을 기준으로 저수지 물의 양이 어떻게 변하는가를 측정하는 데서 비롯되었다. 즉, 매년 유입되는 강수량은 유동적이기 때문에 정확한 양을 알 수 없고, 방출량은 인위적으로 운용되고 있으므로 적절한 저수량정책의 효과는 평균적 방출량($M_N$)에 대한 유입량($e_u$)의 누적편차로써 측정될 수 있다. 이 측정값을 표준화하기 위하여 관찰값의 표준편차로 나누어 주게 되는데, 이러한 분석을 Rescaled Range(R/S)분석이라고 하며, 평균으로부터의 누적편차는 다음과 같다.[7)]

$$X_{t,N} = \sum_{u=1}^{t}(e_u - M_N) \tag{1}$$

여기서 $X_{t,N}$=$t$기까지의 누적편차

6) 본 절에서 사용된 검정법의 직관적인 설명에 대해서는 백웅기(1997a) 참조.
7) R/S분석 및 Hurst지수의 측정에 관한 자세한 논의는 Peters(1991), p.62 참조.

$e_u = u$시기에 유입량
$M_N = N$기간 동안의 $e_u$의 평균.

누적편차의 범위 $R$은 $N$기간 $X_{t,N}$의 최대값과 최소값의 차이로 구한다.

$$R = \mathrm{Max}\,(X_{t,N}) - \mathrm{Min}\,(X_{t,N}). \tag{2}$$

Hurst는 누적편차를 관찰값의 표준편차 $S$로 나누어 줌으로써 모형을 일반화하였다. 이러한 rescaled range는 시간이 증가함에 따라 증가하는 경향을 보이며, Hurst는 경험적으로 Hurst지수 $H$를 측정하였다.

$$\frac{R}{S} = c \times N^H \tag{3}$$

여기서, $\frac{R}{S}$ ≒ 재조정 범위(Rescaled Range)
$H$≒Hurst 지수
$c$≒양의 상수

실증분석시에는 식 (3)의 양변에 log를 취하고 회귀분석을 실시함으로써 Hurst 지수를 추정할 수 있다.

$$\log\left(\frac{R}{S}\right) = H \times \log(N) + \log(c). \tag{4}$$

Hurst지수는 일반적으로 $0<H<1$의 값을 갖는다. Hurst지수추정치가 0.5라면 시계열자료는 장기적 종속성이 없는 상태인 임의보행과정(random walk)을 따르기 때문에 예측이 불가능하다. 즉, 누적편차의 범위가 시간의 제곱근에 비례해 증가하는 경우이다.

그러나 Hurst지수 $H$의 추정치가 0.5보다 작으면 시계열은 추세회귀적 성향을 보인다. 이 경우에는 시계열의 전기값이 상승했다면 이번 기의 값은 하락할 가능성이 높아진다고 볼 수 있다. 따라서 $0<H<0.5$라면 $H=0.5$인 경우보다 시계열 등락의 빈도수가 커진다. 반면 $H$가 0.5보다 크면 현재값이 과거 값으로부터 양의 방향, 즉 추세를 강화시키는 방향으로 영향을 받기 때문에 현재의 추세가 지속될 가능성이 크다. 만약 전기값이 상승했다면 이번 기의 값도 상승할 가능성이 크다는 의미가 된다. $H$가 1에 가까울수록 추세는 강화되는 경향이 있다.[8)]

카오스체계로부터 생성된 시계열의 Hurst지수 $H$는 $N$의 값이 작다면 추세강화적인 현상을 보이기 때문에 $H>0.5$ 이지만 $N$이 커진다면 현재의 시계열값이 미래값을 예측하는 데 도움이 되지 않기 때문에 0.5에 수렴한다. 따라서 $N$이 증가함에 따라 $H$값이 변하는 시점의 $N$은 기억효과가 지속되는 기간을 의미한다.

## 2. 상관적분

상관적분(correlation intergial)은 주어진 시계열자료가 매립차원(embedding dimension)을 증가시킴에 따라 얼마나 조밀하게 매립공간을 채워 나가는지 측정하는 방법이다. 예를 들면, 독립적이고 동일한 분포(IID)를 가지는 확률변수를 취하고 매립차원 $m$을 증가시키면 $m$-history로 구성된 관측치들은 매립공간을 골고루 채워 나갈 것으로 기대된다. 그러나 tent map과정으로부터 생성된 관측치들은 $m$이 2로 증가하면 금방 비선형 구조를 나타내기 때문에 2차원 매립공간을 골고루 채울 수 없다. 이러한 개념은 다음과 같이 정리할 수 있다.

[정의] *상관적분 $C(\varepsilon,\ T)$는 다음과 같이 정의된다.*[9]

$$C(\varepsilon,\ T) = \text{Number}\,\frac{[\,(t,s) \mid 1 \le t < s \le T,\ \| a_t - a_s \| < \varepsilon]}{T^*}$$

$$= \sum_{1\le t<s\le T} \frac{I(a_t, a_s; \varepsilon)}{T^*}$$

여기서, Number: 조건을 만족시키는 쌍의 개수,

$T^*$: 표본크기 $T$에 대하여 $\frac{T(T-1)}{2}$

또한 norm은 sup norm을 사용하기로 하며 지시함수(indicator function) I( · )는 조건 $\| a_t = a_s \| \le \varepsilon$ 이 만족되면 1, 그렇지 않으면 0의 값을 가진다.

상관적분은 척도모수(scale parameter) $\varepsilon$의 함수이며, $\varepsilon$값이 변함에 따라 분포함수와 마찬가지로 0부터 1의 값을 취한다. 수학적으로는 관측된 표본으로부터 두 개의 서로 다른 값으로 모든 가능한 쌍을 만들었을 때 그 거리가 $\varepsilon$보다 같거나 작은 $(t,\ s)$쌍의 전체에 대한 비율을 의미한다. 표본의 크기가 $T$이므로 생성

8) 임의보행과정을 따른다면 $H$=0.5가 되어야 할 것이다.

9) 자명한 경우에 한하여 $C(\varepsilon, T)$는 $C(\varepsilon)$와 같이 표본크기 $T$를 생략한다.

가능한 관측쌍은 모두 $T(T-1)/2$, 즉 $T^*$이고 두 값의 거리가 $\varepsilon$보다 같거나 작은 쌍의 개수는 모두 $\sum_{1 \le t < s \le T} I(a_t, a_s; \varepsilon)$이 된다. 척도모수 $\varepsilon$의 크기를 증가시킴으로써 새로 포착되는 쌍의 개수를 계수하면 공간적 상관의 정도를 파악할 수 있다. 이와 같이 얻어진 공간상관계수를 상관차원(correlation dimension)이라고 하고, $\varepsilon$을 1% 증가시켰을 때 새로이 추가되는 쌍의 증가율로 해석한다. 부연하면 상관차원은 변수 $\{a_t\}$의 척도모수 $\varepsilon$에 대한 탄성치가 된다. 이와 유사한 개념의 고차원상의 상관적분을 다음과 같이 정의한다.

[정의] $m$-차원의 상관적분 $C^m(\varepsilon, T)$는 다음과 같이 정의된다.[10)]

$$C^m(\varepsilon, T) = Number\frac{[(t, s)|1 \le t < s \le T, \ \| a_t^m - a_s^m \| < \varepsilon]}{T^*}$$

여기서 $a_t^m$: $(a_t, a_{t+1}, \cdots a_{t+m-1})$,

$a_s^m$: $(a_s, a+s+1, \cdots a_{s+m-1})$, $\| y \| = sup(|y_i|, i=1, \cdots, m)$

$T^*$: $\dfrac{(T-m+1)(T-m)}{2}$ 이다.

## 3. 상관차원

Grassberger and Procaccia(1983)는 상관적분을 사용하여 쪽거리 차원(fractal dimension)을 근사적으로 추정할 수 있는 방법을 개발하였다. 구체적인 측정방법은 시계열자료를 $m$-차원의 벡터로 재구성한 다음, 매립차원을 점차 증가시키고 척도모수 $\varepsilon$도 아주 작은 수부터 점차 증가시키면서 상관적분 $C^m(\varepsilon)$이 변화를 [illegible]

측정한다. 이 때 쪽거리 차원 $D$는 다음과 같은 관계식에 의하여 측정된다.

$$\log(C^m(\varepsilon)) = D\log(\varepsilon) + \text{constant}. \tag{5}$$

매립차원 $m$을 증가시킴에 따라 $D$는 어떠한 값에 수렴하게 되는데, 수렴된 상태의 $D$값이 바로 상관차원(correlation dimension)이고, 이보다 큰 정수차원이 시계열자료를 설명할 수 있는 최소한의 요소개수가 된다.

왜 유용한지는 직관적 설명이 가능하다. 먼저 [0, 1] 구간에서 균일분포를 갖는 확률변수 $\{r_t\}$의 충분히 큰 표본을 얻는다. 이를 [0, 1]의 폐쇄구간에 채우면 어떤 특정한 부분구간이나 점에 밀집되어 있지 않고 그 구간을 고루 메우게 된다. 따라서 $\{r_t\}$의 차원은 적어도 1차원이 됨을 알 수 있다. 그 후 매립과정을 거쳐 2차원의 점 $\{(r_t, r_{t+1})\}$을 만들고 이를 2차원 공간 $[0, 1]^2$에 메운다. 만약 $\{r_t\}$가 독립이면 $\{(r_t, r_{t+1})\}$ 역시 $[0, 1]^2$의 2차원 공간에 균일하게 분포되므로 $\{r_t\}$는 2차원이 된다. 매립차원을 그 이상으로 증가시키더라도 고차원공간의 $[0, 1]^m$을 모두 메우게 되므로 우리는 완전독립인 확률변수 $\{r_t\}$의 차원은 무한대라고 할 수 있다.

그러나 $\{r_t\}$가 AR(1) 과정을 갖거나 그 외의 다른 형태의 계열종속과정을 가질 경우 매립차원을 늘려 나갈 때 독립인 확률변수에 비해서 고차원공간을 채우는 분산도의 정도가 떨어지며, 이는 상관적분용어로 표현하자면 적절한 $\varepsilon$에 대해 $C^m(\varepsilon)$은 $C^1(\varepsilon)^m$으로부터 괴리가 발생한다. BDS검정법은 이 괴리현상을 포착하여 독립성 검정을 수행한다.

Brock, Dechert, LeBaron, and Scheinkman(1996)은 IID귀무가설하에서 관측치 $T$가 무한대로 수렴함에 따라 BDS통계량 $W_m$이 정규분포 $N(0, V_m)$의 분포에 수렴한다는 것을 밝혔다.

[정리] *BDS*통계량

$m \geq 2$이고 $\{X_t\}$가 IID인 경우

$$W_m(\varepsilon) = T^{\frac{1}{2}}[C^m(\varepsilon, T) - C^1(\varepsilon, T)^m] \rightarrow N(0, V_m)$$

$V_m$은 *BDS*통계량의 분산인데 다소 복잡한 구조를 가진다.

$$V_m = 4[K^m + 2\sum_{j=1}^{m-1} K^{m-j}C^{2j} + (m-1)^2 C^{2m} - m^2 C^{2m-2}]$$

단, $C = E[I(X_t, X_s; \varepsilon)] = \int [F(X+\varepsilon) - F(X-\varepsilon)]dF(X)$

$$K = E[I(X_t, X_s; \varepsilon)I(X_s, X_u; \varepsilon)] = \int [F(X+\varepsilon) - F(X-\varepsilon)]^2 dF(X)$$

$C(\varepsilon, T)$와 $K(\varepsilon, T) = \frac{6}{T(T-1)(T-2)} \sum_{1 \leq t < s < u \leq T} I(X_t, X_s; \varepsilon) I(X_s, X_u; \varepsilon)$은 각각 $C$와 $K$의 일치추정량이 되므로 공식 $V_m$에 사용된 $C$와 $K$ 대신 $C(\varepsilon, T)$와 $K(\varepsilon, T)$를 사용하면 $V_m$의 일치추정량 $V_m(\varepsilon, T)$를 계산할 수 있다.

위 정리로부터 시계열 $\{X_t\}$가 IID라는 귀무가설하에서 표준화된 *BDS*통계량 $W_m^s(\varepsilon)$을 얻을 수 있는데, 이는

$$W_m^s(\varepsilon)=\frac{T^{\frac{1}{2}}[C^m(\varepsilon,\ T)-C^1(\varepsilon,\ T)^m]}{V_m(\varepsilon,\ T)^{\frac{1}{2}}}$$

으로 정의되며 표준정규분포를 극한분포로 가진다.

## 5. 분석결과

본절에서는 방림, 크라운제과, 대한제당, 대림통상, 대우증권, 동성제약, 동양화재, 건설화학, 대한항공, 현대건설, 진웅, 조흥은행, LG상사, 만도기계, 포항제철, 새한, 삼성전자, 신흥, 신무림제지, 신세계 등의 20개 개별종목과 종합주가지수(KOSPI)를 대상으로 Hurst지수, 상관차원 및 BDS통계량을 추정하여 그 결과를 논의한다. 개별종목의 주식가격은 유무상증자에 대해 조정한 일일종가를 사용하였다.[11] 자료분석의 시점은 크라운제과, 대한제당, 대림통상, 대우증권, 동양화재, 건설화학, 대한항공, 현대건설, 조흥은행, LG상사, 새한, 삼성전자, 신세계, 종합주가지수는 1986년 1월 4일, 만도기계와 포항제철은 1989년 1월 4일, 방림과 진웅은 1990년 1월4일, 동성제약과 신무림제지는 1991년 1월 3일, 신흥은 1992년 1월 3일로 결정했으며 마지막 일자는 모든 종목에 대해 1998년 3월 12일을 적용하였다.[12]

(1) Hurst지수

20개 주식가격의 Hurst지수 추정결과를 요약하면 〈표 1〉과 같다.

이 표에서 보는 바와 같이 대부분의 Hurst지수가 0.5에서 0.6사이로 주가의 추세강화력이 매우 약한 것으로 판단되었다. 특히, 새한, 대림통상, 동성제약, 진웅, 포항제철의 Hurst지수는 0.5에 매우 근접한 것으로 보아 임의보행과정에 있다고 판단되며, 0.5 이하의 지수값을 보이는 건설화학, 신흥은 특히 미약한 추세회귀성을 갖는 것으로 나타났다. 그 밖의 주가종목은 0.5에서 0.6의 Hurst지수값을 갖는 약한 추세강화성 시계열자료들이다. 그러나 통계적 유의성을 알 수 없기 때문에 거의 대부분의 주가종목들이 임의보행과정과 구별되기 힘든 움직임을 보이고 있

11) 유무상증자에 대해 조정된 데이터는 장은경제연구소에서 제공하였다.
12) 종목마다 상장일자가 다르기 때문에 자료분석의 시점을 달리 잡았다. 1986년 이전에 상장된 종목에 대해서는 종합주가지수가 비교적 활발하게 변동하기 시작했던 1986년 1월 4일을 시점으로 삼았으며, 그 밖의 종목에 대해서는 상장일 1년 후를 시점으로 잡았다.

〈표 1〉 종목별 Hurst지수추정치

| 종목 | 방림 | 크라운제과 | 대한제당 | 대림통상 | 대우증권 | 동성제약 | 동양화재 | 건설화학 | 대한항공 | 현대건설 | 진웅 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hurst Index | 0.6172 | 0.5256 | 0.5451 | 0.5100 | 0.5470 | 0.5170 | 0.5544 | 0.4378 | 0.5735 | 0.5915 | 0.5139 |
| 종목 | 조흥은행 | LG상사 | 만도기계 | 포항제철 | 새한 | 삼성전자 | 신흥 | 신무림제지 | 신세계 | KOSPI | |
| Hurst Index | 0.5304 | 0.5340 | 0.5261 | 0.5009 | 0.4909 | 0.5767 | 0.4157 | 0.6006 | 0.5638 | 0.5944 | |

〈표 2〉 종목별 상관차원 추정치

| 종 목 | 방림 | 크라운제과 | 대한제당 | 대림통상 | 대우증권 | 동성제약 | 동양화재 | 건설화학 | 대한항공 | 현대건설 | 진웅 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Correlation Dimension | 2.42 | 1.81 | 1.29 | 2.68 | 2.65 | 2.92 | 3.95 | 2.06 | 1.29 | 2.77 | 4.37 |
| 종목 | 조흥은행 | LG상사 | 만도기계 | 포항제철 | 새한 | 삼성전자 | 신흥 | 신무림제지 | 신세계 | KOSPI | |
| Correlation Dimension | 4.08 | 4.54 | 3.68 | 3.49 | 3.52 | 2.53 | 3.44 | 2.36 | 1.53 | 5.10 | |

음을 알 수 있다.

(2) 상관차원

〈표 2〉는 매립차원을 2부터 9까지 증가시켰을 때 나타나는 상관차원의 변동이다. 상관차원은 시계열 자료 속에 규칙성과 끌개(attractor)의 형태 등에 의해서 결정되는데, 〈표 2〉에 정리되어 있는 주가종목별 상관차원을 보면 매우 다양한 값을 갖고 있는 것을 볼 수 있다. 이는 상관차원이 그 시계열자료를 설명할 수 있는 설명변수의 수와 근사하다고 볼 때, 수치가 1에서 2 사이의 값을 나타내는 종목은 임의보행을 하고 있을 경우가 많다. 반면 3 이상의 비교적 큰 값을 보이

는 종목은 고차원에 투영될 경우에 볼 수 있는 비선형 체계의 특성을 가질 가능성이 있다고 해석할 수 있다.[13] 따라서 우리가 관심 있는 종목은 상관차원의 추정치가 비교적 큰 경우이다. 예를 들면, 동성제약, 동양화재, 진웅, 조흥은행, LG상사, 만도기계, 포항제철, 새한, 신흥 등의 종목이 대략 3-5의 상관차원을 보이고 있다.

(3) BDS통계량

〈표 3〉에는 삼성전자 주가수익률기준의 BDS통계량이 수록되어 있다.[14] 개별 종목에 대해 scale parameter $\varepsilon$은 0.8, $0.8^3$, $0.8^5$의 값을 갖도록 하였으며, 각 parameter마다 매립차원을 2부터 7까지 증가시켜 보았다.[15] BDS통계량은 주가수익률, 주가수익률로부터 AR구조를 제거시킨 시계열, 주가수익률로부터 GARCH 구조를 제거시킨 시계열에 대해 계산하였다.

〈표 3〉 삼성전자 BDS 통계량

| $\varepsilon$ | m | BDS | AR-BDS | GARCH-BDS |
|---|---|---|---|---|
| 0.8 | 2 | 95.5 | 6.0 | 12.3 |
| 0.8 | 3 | 122.0 | 46.6 | 77.1 |
| 0.8 | 4 | 146.3 | 71.6 | 108.5 |
| 0.8 | 5 | 162.5 | 92.4 | 134.6 |
| 0.8 | 6 | 171.0 | 106.3 | 150.5 |
| 0.8 | 7 | 174.9 | 111.9 | 156.2 |
| $0.8^3$ | 2 | 22.7 | 11.4 | 13.4 |
| $0.8^3$ | 3 | 28.0 | 16.9 | 19.3 |
| $0.8^3$ | 4 | 31.4 | 21.4 | 23.9 |
| $0.8^3$ | 5 | 33.8 | 24.6 | 27.0 |
| $0.8^3$ | 6 | 35.3 | 26.7 | 29.2 |
| $0.8^3$ | 7 | 36.2 | 27.9 | 30.5 |
| $0.8^5$ | 2 | 18.2 | 13.8 | 15.4 |
| $0.8^5$ | 3 | 21.4 | 18.8 | 19.8 |
| $0.8^5$ | 4 | 23.6 | 22.6 | 23.2 |
| $0.8^5$ | 5 | 24.7 | 24.5 | 24.9 |
| $0.8^5$ | 6 | 25.3 | 25.7 | 26.0 |
| $0.8^5$ | 7 | 25.9 | 26.4 | 26.6 |

13) 예측을 위한 신경망모형 구축시 상관차원의 값보다 큰 정수개만큼의 입력자료를 사용한다.
14) 지면을 절약하기 위해 나머지 19개 종목과 KOSPI에 대한 BDS값은 생략하였음. 자세한 계산값은 백웅기 · 황윤재(1998) 참조.
15) BDS계산에는 Dechert program을 이용하였으며 $\varepsilon$의 단위는 데이터의 스프레드이다.

추정결과 20개 종목 중 진웅, 크라운제과, 만도기계, LG상사의 4개 종목에 대해서만 IID일 가능성을 보였을 뿐 나머지 16개 종목은 IID가설을 기각하였다.16) 주가수익률로부터 선형구조나 GARCH구조를 제거한 경우에도 BDS통계량은 거의 영향을 받지 않음에 따라 주가수익률은 카오스체계를 가지거나 발견되지 않은 형태의 비선형이 있다고 볼 수 있다. 주가수익률이 과연 카오스구조를 가질 수 있을 것이냐 하는 문제는 다음 절에 언급할 Lyapunov지수를 계산함으로써 어느 정도 해결될 수 있다. 만약 20개 주가수익률의 최대Lyapunov지수가 양이 아니라면 주가수익률은 카오스라기보다는 시계열독립성을 저해하는 어떤 형태의 비선형 구조를 가지고 있을 가능성이 크다고 해석할 수 있다.

## Ⅲ. Lyapunov지수의 정의 및 추정

### 1. 정 의

다음의 비선형 자기회귀모형(nonlinear autoregressive model)을 고려하자.

$$X_t = m_0(X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots\cdots, X_{t-k}) + \varepsilon_t,\ t=1, \cdots\cdots,\ T. \tag{6}$$

식 (6)에서 $X_t \in R$, 오차항$\{\varepsilon_t\}$는 평균 0, 분산 $\sigma^2$인 확률변수, 그리고 $m_0(\cdot): R^k \to R$는 미지(未知)의 회귀함수를 나타낸다. 위의 모형은 상태벡터(state vector) $Z_t = (X_t, \cdots\cdots, X_{t-k+1})' \in R^k$, 함수, $M(\cdot): R^k \to R$, 그리고 오차벡터 $e_t = (\varepsilon_t, 0, \cdots\cdots, 0)' \in R^k$ 를 이용하여

$$Z_t = M(Z_{t-1}) + e_t,\ \ t=1, \cdots\cdots T \tag{7}$$

의 형태로 나타낼 수 있다.

Lyapunov지수는 초기 상태벡터의 교란이 차후의 상태벡터에 어떤 영향을 줄 것인가를 살펴보기 위한 값이다. 구체적으로 최대Lyapunov지수는 다음과 같이 정의된다.

16) 4개 종목은 scale parameter가 0.8일 경우, 만도기계는 parameter가 0.512일 경우에만 IID가설을 기각하기 어려웠을 뿐 다른 parameter값에 대해서는 대체로 IID가설을 기각하였다.

$$\lambda \overset{a.s.}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \left\| \prod_{t=1}^{T} J_{T-t} \right\| \tag{8}$$

식 (8)의 정의에서 $\|\cdot\|$은 임의의 matrix norm, $J_t$는 함수 $M(\cdot)$의 $Z_t$에서의 Jacobian값을 나타낸다. 즉, $\Delta m_{jt}$를 $m_0(Z_t)$의 $j$ 번째 원소 $Z_{jt}(j=1,\cdots\cdots,k)$에 대한 편미분값인 $\Delta m_{jt}=D^{e_j}m_0(Z_t)$라고 정의한다면, ($e_j=(0,\cdots,1,\cdots,0)'\in R^k$는 $j$ 번째 단위벡터임) $J_t$는 다음과 같이 표현된다.

$$J_t=\begin{bmatrix} \Delta m_{1t} & \Delta m_{2t} & \cdots & \Delta m_{k-1,t} & \Delta m_{kt} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

카오스체계(chaotic system)하에서는 두 유사한 상태벡터에서 출발한 체계의 궤적(trajectory)들이 기하급수적으로 발산하여 종국적으로는 전혀 유사하게 보이지 않게 된다. 이러한 '초기조건에의 민감한 의존성(sensitive dependence on initial conditions)'이야말로 카오스적 동태과정의 대표적 특징인 것이다. 미소한 초기조건의 변화에 대한 궤적의 발산율(divergence rate)은 바로 식 (8)에서 정의한 Lyapunov지수에 의해 측정될 수 있다. $\lambda$가 음수이면 체계의 궤적들이 발산이 아니라 수렴하게 됨을 나타낸다. 따라서 한 체계(system)가 카오스적(chaotic)이라는 것은 Lyapunov지수 $\lambda$의 값이 陽數인 상태로 정의할 수 있다.

## 2. 추정방법

Lyapunov지수를 추정하기 위한 전통적인 방법으로는 Guckenheimer(1982)에 의해 개발되고 Wolf *et al.*(1985)에 의해 적용된 이른바 '직접추정법(Direct method)'을 들 수 있다. 이 추정법은 충분히 가까운 두 관측치들을 여러 번 선택하여 그 관측치들의 시간경과에 따른 발산율의 평균값을 구하는 방법이다. 이 방법은 기존 문헌에서 널리 이용되어 왔으나, 관측치의 수가 매우 많고 noise가 거의 없는 선형체계에서만 성공적으로 적용될 수 있다는 단점이 있다. 특히, 본 논문에서 살펴보는 경우와 같은, noise가 있는 비선형체계에서는 '직접추정법'은 陽의 편의(bias)를 가지는 추정치를 낳는 것으로 알려져 있다(McCaffrey *et al.*, 1992 참조).

한편, 본 논문에서는 식 (9)에서 정의된 Jacobian의 비모수적 추정을 통한 Lyapunov지수의 추정법을 고려한다. 그 추정법은 다음과 같다. $\widehat{m}(\cdot)$을 $m_0(\cdot)$에 대한 비모수추정량이라고 정의하자.17) 본 Lyapunov지수의 추정량은 기본적으로 Nychka *et al.*(1992)과 Whang and Linton(1998)에 의해 고려된 것이다. 그 추정량은 기본적으로 전체표본을 이용한 경우(full sample estimator)와 부분표본을 이용한 경우(sub-sample estimator)로 구분이 된다. 이러한 두 경우를 구분하는 것은 추정량의 점근적 분포를 구하기 위한 기술적인 가정에 기인하고 있다. 구체적으로 전체표본추정량을 사용하기 위해서는 회귀함수 $m_0(x)$의 미분의 절대값이 모든 $x \in R$에 있어서 양의 값을 가질 것을 요구하고 있다. 이러한 가정은 매우 제약적인 것으로 많은 chaotic map이 그러한 가정을 충족하지 않는다. 한편 부분표본추정량은 그러한 가정 없이도 의도하는 극한분포를 가질 수 있다. 그러나 두 경우 모두에 있어서, 회귀함수 $m_0(\cdot)$의 비모수적 추정을 하기 위해서는 $T$개의 전체표본 $\{X_0, \cdots, X_{T-1}\}$ 모두를 사용한다.

$\widehat{J}_t$를 Jacobian $J_t$의 비모수추정량이라 하자. $\lambda$에 대한 전체표본 및 부분표본 추정량의 정의의 기본적인 차이점은 사용되는 Jacobian추정량 $\widehat{J}_t$의 개수이다. $n \equiv n(T)$ $(\leq T)$를 부분표본의 개수라고 정의하면 $\widehat{\lambda}$이 전체표본추정량일 경우 $n = T$가 되고 $T$개의 Jacobian $\{\widehat{J}_0, \cdots\cdots, \widehat{J}_{T-1}\}$을 모두 사용하게 된다. 한편 부분표본추정량 $\widehat{\lambda}$은 $n(<T)$개의 Jacobian추정량 $\{\widehat{J}_{S_1}, \widehat{J}_{S_2}, \cdots\cdots, \widehat{J}_{S_n}\}$만을 사용하여 정의된다(이 때 index set $\{S_1, \cdots\cdots, S_n\}$의 적절한 선택에 관해서는 Whang and Linton, 1998; McCaffrey *et al.*, 1992의 논의 참조). 이론적으로 부분추정량이 우도하는 점근적 성질을 가지기 위해서는 $n$은 $T \to \infty$에 따라 $n \to \infty$하여야 하나 증가율이 $T^{1/3}$보다 더 빠르지 않아야 한다(Whang and Linton, 1998 참조).

이제 본 논문에서 고려하는 $\lambda$의 추정량의 일반적 정의는 다음과 같다.

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n} \ln \left\| \prod_{t=1}^{n} \widehat{J}_{n-t} \right\| \tag{10}$$

이때 $n(\leq T)$이며, 여기서

17) 적절한 비모수추정량의 예로서는 kernel, nearest neighbor, spline, series, local polynomial, 그리고 neural net추정법을 들 수 있다.

$$\hat{J}_t = \begin{bmatrix} \Delta\widehat{m_{1t}} & \Delta\widehat{m_{2t}} & \cdots & \Delta\ \widehat{m}_{k-1,t} & \Delta\widehat{m_{kt}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

그리고 $\Delta\widehat{m_{jt}} = D^{e_j}\widehat{m}(Z_t)$을 나타낸다.

$k=1$인 경우 $\lambda$와 $\hat{\lambda}$의 정의는 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$\lambda \overset{a.s.}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^{T} \ln[DM_0(X_{t-1})^2] \tag{12}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2n} \sum_{t=1}^{n} \ln[D\widehat{M}(X_{t-1})^2] \tag{13}$$

이 경우 비모수추정을 위해, 예컨대 local polynomial추정을 하기 위해서는 다음의 목적함수를 최소화하여야 한다.

$$\min_{\theta_0,\cdots\cdots,\theta_p} \sum_{t=1}^{T} K\left(\frac{x-X_{t-1}}{h}\right)\left[X_t - \theta_0 - \theta_1(X_{t-1}-x) - \cdots\cdots - \theta_P \frac{(X_{t-1}-x)^P}{P!}\right]^2 \tag{14}$$

이 때 $\widehat{\theta}_0$은 $m_0(x)$, 그리고 $\widehat{\theta}_j$는 $m_0(x)$의 $j$ 번째 미분값인 $D^j m_0(x)$에 대한 추정량으로 정의된다($j=1,\cdots\cdots,p$). 식 (14)에서 $K(\cdot)$는 kernel function이고, $h$는 bandwidth parameter를 나타낸다.

McCaffrey *et. al.*(1992)는 식 (8)의 추정량과 유사한 추정량이 $\lambda$에 대해 일치성(consistency)을 가짐을 직관적 논의를 통해 보이고 그 수렴률(convergence rate)이 매우 낮을 수 있다는 추측을 제시한 바 있다. 그러나 이러한 그들의 결과는 추정량의 분포적 성질을 규명하지 못함으로써 카오스존재를 검정하기 위해 $\hat{\lambda}$을 이용하는 데 한계점이 있다. 그러나 최근 Whang and Linton(1998)의 연구는 $\hat{\lambda}$의 점근적 분포를 도출함으로써 비로소 카오스존재를 직접적으로 검정할 수 있는 계기를 제공하였다.

Whang and Linton(1998)은 적절한 조건하에서 $\sqrt{n}(\hat{\lambda}-\lambda)$이 점근적으로 정규분포를 가짐을 보였다. 이 때 그 점근적 분포의 공분산행렬은 $\hat{\lambda}$이 전체표본추

정량일 경우(즉, $n = T$의 경우)와 부분표본추정량일 경우 (즉, $n < T$의 경우) 각기 달리 정의된다. $\Phi$와 $\Phi_2$를 각각 전체 및 부분표본추정량의 점근적 공분산행렬이라고 하자(정의는 Whang and Linton(1998)의 식 (15) 참조). $k=1$인 경우 $\Phi$와 $\Phi_2$에 대한 추정치는 다음과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\Phi} = \sum_{j=-n+1}^{n-1} k\left(\frac{j}{S_n}\right)\widehat{r}(j);\ \widehat{\Phi}_2 = \sum_{j=-n+1}^{n-1} k\left(\frac{j}{S_n}\right)\widehat{r}_2(j), \\
&\widehat{r}(j) = \frac{1}{n}\sum_{t=|j|+1}^{n-1} \widehat{\eta}_t\, \widehat{\eta}_{t-|j|};\ \widehat{r}_2(j) = \frac{1}{n}\sum_{t=|j|+1}^{n} \widehat{\eta}_{2t}\, \widehat{\eta}_{2,t-|j|} \qquad (15) \\
&\widehat{\eta}_{1t} = \{X_t - \widehat{m}(X_{t-1})\}\left\{\frac{D^2\widehat{m}(X_{t-1})}{[D\widehat{m}(X_{t-1})]^2} - \frac{D\widehat{f}(X_{t-1})}{[D\widehat{m}(X_{t-1})]\widehat{f}(X_{t-1})}\right\} \\
&\widehat{\eta}_{2t} = \ln|D\widehat{m}(X_{t-1})| - \widehat{\lambda};\ \widehat{\eta}_t = \widehat{\eta}_{1t} + \widehat{\eta}_{2t}
\end{aligned}
$$

위식에서 $k(\cdot)$, $S_n$ 그리고 $\widehat{f}(\cdot)$는 각각 커널함수(kernel function), lag truncation parameter 그리고 $X_t$의 확률밀도함수(probability density function)의 추정치이다.

위에서 정의된 $\widehat{\Phi}$과 $\widehat{\Phi}_2$는 전통적인 계량경제학 문헌에서 사용되는 회귀모형에서 계수추정치의 HAC추정량(Heteroskedasticity Autocorrelation Consistent estimator)의 형태와 유사하다.[18] 실제 kernel function $k(\cdot)$와 lag truncation parameter $S_n$의 선택에 있어서도 이러한 기존 문헌의 연구결과가 우리의 경우에도 그대로 적용될 수 있다.

## Ⅳ. Lyapunov지수 추정결과

### 1. 자료설명

본 연구에서 고려한 분석자료는 1980년 1월 4일부터 1998년 3월 12일까지 관측된 21개 종목의 일일 주식가격(종가기준)을 유무상증자를 고려해 새로 조정한 가격이다. 구체적인 고려대상 종목과 각각의 관측기간은 〈표 4〉에 나타나 있다.

---

18) Andrews(1991); Newey and West(1987); White(1984); Gallant(1987); Andrews and Monahan(1992); Hansen(1992); DeJong and Davidson(1996) 등 참조.

〈표 4〉 기초 통계량

| 종　목 | 관측시작일1) | 관측치수 | 평균 | 표준편차 | 최소값 | 최대값 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 삼성전자 | 1980.1.4 | 5,329 | 115,064.2 | 130,748.0 | 7,149 | 587,850 |
| 포항제철 | 1988.1.4 | 2,985 | 40,254.4 | 17,632.4 | 16,500 | 89,600 |
| 현대건설 | 1984.1.4 | 4,156 | 25,127.9 | 13,462.8 | 8,500 | 57,858 |
| 신 세 계 | 1985.8.19 | 3,677 | 48,452.9 | 30,618.0 | 6,550 | 142,395 |
| 진　웅 | 1989.1.4 | 2,692 | 17,641.6 | 4,145.5 | 6,354 | 28,395 |
| 새　한 | 1980.1.4 | 5,329 | 18,737.0 | 9,708.6 | 3,550 | 34,819 |
| 대한제당 | 1980.1.4 | 5,329 | 21,333.3 | 16,706.5 | 2,130 | 70,357 |
| 크라운제과 | 1980.1.4 | 5,329 | 36,849.6 | 25,943.2 | 3,570 | 133,474 |
| 방　림 | 1989.1.4 | 2,692 | 32,859.4 | 15,218.4 | 7,180 | 75,400 |
| 신무림제지 | 1990.1.3 | 2,403 | 14,093.1 | 4,892.1 | 4,328 | 31,378 |
| 동성제약 | 1990.1.3 | 2,403 | 19,673.6 | 6,871.7 | 7,500 | 38,000 |
| 동양화재 | 1980.1.4 | 5,329 | 29,124.8 | 22,445.1 | 1,876 | 81,417 |
| 대우증권 | 1980.1.4 | 5,329 | 30,807.1 | 24,117.5 | 1,400 | 86,503 |
| 조흥은행 | 1980.1.4 | 5,329 | 15,989.1 | 10,288.8 | 3,551 | 39,688 |
| 건설화학 | 1980.1.4 | 5,329 | 25,687.6 | 18,727.5 | 4,600 | 90,076 |
| 대림통상 | 1980.1.4 | 5,329 | 24,938.0 | 15,257.8 | 2,950 | 78,516 |
| 만도기계 | 1988.1.4 | 2,985 | 59,149.4 | 17,789.8 | 11,201 | 107,088 |
| 신　흥 | 1991.1.3 | 2,112 | 27,223.6 | 6,596.6 | 13,623 | 44,779 |
| 대한항공 | 1980.1.4 | 5,329 | 45,751.9 | 34,015.8 | 3,325 | 113,038 |
| LG상사 | 1980.1.4 | 5,329 | 14,424.8 | 8,759 | 3,900 | 38,589 |
| KOSPI | 1980.1.4 | 5,329 | 506.1 | 321.3 | 93.1 | 1,138.8 |

주: 1) 자료의 최종 관측일은 1998년 3월 12일임.

〈표 4〉에서는 또한 각 종목의 관측치수(최대 5329개, 최소 2112개)와 관측치의 평균값, 표준편차, 최소값 그리고 최대값이 나타나 있다.

## 2. 단위근 검정

카오스적 성질은 각기 다른 초기조건에서 출발한 두 시계열이 시간경과에 따

라 무한히 발산하는 상태로 정의되지만, 그러한 성질은 국지적(local)인 것이다. 즉, 카오스는 달리 표현하면, '국지적 폭발성 및 전체적 제한성(local explosiveness and global boundedness)'으로 특징되는 것이다. 특히 시계열의 경우, 카오스는 제한된 범위 내에서 값을 취하고, 안정적인 시계열(bounded and stationary time series)에 대해서만 적용이 되는 개념으로 간주되고 있다. 따라서 무한한 값을 취할 수 있거나 불안정 시계열(unbounded or nonstationary time series)은 카오스적 특성과는 무관하게 받아들여질 수 있다. 따라서 우리의 경우에 있어서도 카오스의 검정에 앞서 분석대상이 되는 주식가격들의 시계열적 특성을 먼저 규명할 필요가 있다.

〈표 5〉와 〈표 6〉에서는 주식가격의 로그수준변수, 로그차분변수에 대하여 Augmented Dickey-Fuller (ADF)검정을 시행한 결과가 제시되고 있다. 모형 I, II, 그리고 III 은 각각 회귀식이 상수항을 포함하지 않는 경우, 상수항만을 포함하는 경우, 그리고 상수항과 시간추세(time trend)를 포함하는 경우를 나타내고 있다. 이 때 ADF검정에 있어서, 회귀식에 포함된 종속변수의 lagged difference의 개수는 4로 고정하였다.[19] 로그수준변수에서는 모든 종목의 주식가격에 있어 5% 유의수준에서 단위근을 가짐을 알 수 있으나 로그차분변수들은 더 이상 단위근을 가지지 않는 것을 알 수 있다. 이러한 결과를 종합하여 로그차분변수는 안정적인 시계열로서 카오스적 성질을 가지기 위한 필요조건을 충족함을 알 수 있다.

### 3. Lyapunov지수의 추정결과

본 연구의 실증분석에서는 각 종목의 주식가격들이 다음과 같이 1계 비선형자기회귀과정(first-order nonlinear autoregressive process)에 따른다고 가정하였다.

$$X_t = m_0(X_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \cdots\cdots, T. \tag{16}$$

19) 본 연구에서 lagged difference값의 선택에 따른 단위근검정의 결과 자의성을 피하기 위해 4 이외에 다른 다양한 값도 고려하였으나, 결과는 큰 차이가 없었다. lagged difference의 값을 결정하기 위해 Akaike Information Criterion과 같은 목적함수를 최소화하는 방법 등도 유사한 결과를 가져올 것으로 판단되어 본 연구에서 분석의 편의상 고려하지 않았다.

〈표 5〉 단위근검정결과(log-level)

| 종 목 | $\hat{\rho}$ [ADF $t$-통계량] | | |
|---|---|---|---|
| | 모형 I | 모형 II | 모형 III |
| 삼성전자 | 1.0001 [2.1591] | 0.9999 [−0.4773] | 0.9982 [−2.3008] |
| 포항제철 | 1.0000 [0.5222] | 0.9994 [−0.7129] | 0.9981 [−1.8881] |
| 현대건설 | 1.0000 [0.1584] | 0.9990 [−1.6928] | 0.9993 [−0.8567] |
| 신 세 계 | 1.0000 [0.7982] | 0.9988 [−2.1913] | 0.9985 [−1.6848] |
| 진 웅 | 1.0000 [−0.1479] | 0.9927 [−3.3262] | 0.9915 [−3.4964] |
| 새 한 | 1.0000 [0.6290] | 0.9992 [−1.8844] | 0.9989 [−1.2982] |
| 대한제당 | 1.0000 [0.9168] | 0.9995 [−1.4157] | 0.9981 [−1.8067] |
| 크라운제과 | 1.0000 [0.3210] | 0.9993 [−1.8883] | 1.0002 [0.2225] |
| 방 림 | 1.0000 [−0.0762] | 0.9983 [−1.6938] | 0.9978 [−1.8315] |
| 신무림제지 | 1.0000 [−0.4481] | 0.9966 [−2.1271] | 0.9965 [−2.1291] |
| 동성제약 | 1.0000 [−0.0959] | 0.9973 [−1.8360] | 0.9948 [−2.5442] |
| 동양화재 | 1.0000 [0.3810] | 0.9997 [−1.1865] | 0.9996 [−0.8601] |
| 대우증권 | 1.0000 [0.6492] | 0.9997 [−1.1854] | 0.9997 [−0.6811] |
| 조흥은행 | 1.0000 [0.1782] | 0.9995 [−1.3006] | 1.0001 [0.2243] |
| 건설화학 | 1.0000 [1.0069] | 0.9997 [−0.8673] | 0.9936 [−4.3761] |
| 대림통상 | 1.0000 [1.2528] | 0.9990 [−2.0457] | 0.9966 [−3.1712] |
| 만도기계 | 1.0000 [−0.0687] | 0.9965 [−2.6622] | 0.9970 [−2.1359] |
| 신 홍 | 1.0000 [0.1403] | 0.9919 [−2.9989] | 0.9867 [−3.3109] |
| 대한항공 | 1.0000 [0.6385] | 0.9996 [−1.2816] | 0.9999 [−0.1273] |
| LG상사 | 1.0000 [0.0467] | 0.9993 [−1.4217] | 0.9996 [−0.6047] |
| KOSPI | 1.0000 [1.3769] | 0.9997 [−1.4546] | 0.9999 [−0.1867] |

주: $\hat{\rho}$은 AR파라미터추정치, 그리고 [ ] 안의 숫자는 ADF $t$-통계값. 모형 I, II, III은 각각 무상수, 상수항 포함, 상수항 및 시간추세항을 포함한 AR(1)모형을 나타냄. 각 모형에서 (1%, 5%, 10%) 유의수준에서 임계치는 (−2.58, −1.96, −1.63), (−3.46, −2.87, −2.60), 그리고 (−4.00, −3.43, −3.16)임.

〈표 6〉 단위근검정결과 (Log-Difference)

| 종 목 | $\hat{\rho}$ [ADF $t$−통계량] | | |
|---|---|---|---|
| | 모형 I | 모형II | 모형III |
| 삼성전자 | 0.0846 [−32.7725] | 0.0803 [−32.8589] | 0.0802 [−32.8565] |
| 포항제철 | 0.0078 [−25.7252] | 0.0073 [−25.7287] | 0.0046 [−25.7712] |
| 현대건설 | 0.1208 [−28.4948] | 0.1208 [−28.4928] | 0.1182 [−28.5398] |
| 신 세 계 | 0.1756 [−26.4961] | 0.1745 [−26.5130] | 0.1718 [−26.5602] |
| 진 웅 | 0.0710 [−23.9767] | 0.0709 [−23.9723] | 0.0708 [−23.9716] |
| 새 한 | −0.0104 [−34.0642] | −0.0109 [−34.0716] | −0.0130 [−34.1036] |
| 대한제당 | −0.0210 [−34.7024] | −0.0221 [−34.7208] | −0.0229 [−34.7326] |
| 크라운제과 | 0.0792 [−32.4591] | 0.0790 [−32.4605] | 0.0741 [−32.5608] |
| 방 림 | 0.1681 [−22.9278] | 0.1681 [−22.9236] | 0.1679 [−22.9219] |
| 신무림제지 | 0.1238 [−21.8444] | 0.1235 [−21.8437] | 0.1234 [−21.8402] |
| 동성제약 | 0.0456 [−22.1265] | 0.0456 [−22.1219] | 0.0456 [−22.1173] |
| 동양화재 | 0.1858 [−30.5421] | 0.1855 [−30.5447] | 0.1849 [−30.5551] |
| 대우증권 | 0.0364 [−32.4987] | 0.0358 [−32.5081] | 0.0349 [−32.5229] |
| 조흥은행 | −0.0518 [−35.2411] | −0.0519 [−35.2393] | −0.0556 [−35.3144] |
| 건설화학 | 0.0048 [−34.1600] | 0.0038 [−34.1787] | 0.0037 [−34.1773] |
| 대림통상 | 0.0079 [−33.1823] | 0.0060 [−33.2155] | 0.0056 [−33.2209] |
| 만도기계 | 0.2697 [−21.1236] | 0.2697 [−21.1200] | 0.2647 [−21.1983] |
| 신 흥 | −0.0873 [−21.9622] | −0.0874 [−21.9583] | −0.0900 [−21.9843] |
| 대한항공 | 0.0304 [−33.1808] | 0.0298 [−33.1896] | 0.0279 [−33.2267] |
| LG상사 | −0.0779 [−34.9626] | −0.0779 [−34.9594] | −0.0798 [−34.9895] |
| KOSPI | 0.0900 [−32.8489] | 0.0877 [−32.8942] | 0.0855 [−32.9367] |

주: $\hat{\rho}$은 AR 파라미터 추정치, 그리고 [ ] 안의 숫자는 ADF $t$-통계값. 모형 I, II, III은 각각 무상수, 상수항 포함, 상수항 및 시간추세항을 포함한 AR(1)모형을 나타냄. 각 모형에서 (1%, 5%, 10%) 유의수준에서 임계치는 (−2.58, −1.96, −1.63), (−3.46, −2.87, −2.60), 그리고 (−4.00, −3.43, −3.16)임.

이 경우 Lyapunov지수와 그 추정치는 각각 식 (12)와 식 (13)과 같이 정의된 다.[20] 한편 Lyapunov 지수의 추정치의 표준오차(standard error)는 식 (15)를 통해 계산되었다.

먼저 $m_0(\cdot)$과 그 미분값들의 비모수추정을 위해서는 식 (14)에서 정의된 local polynomial추정량을 사용하였다. 이 때 polynomial order $p$는 2로 선택하였다. 따라서 우리의 비모수추정량은 local quadratic추정량이라 할 수 있다. local polynomial추정량은 기존의 Nadaraya-Watson kernel추정량에 비해 독립변수의 값이 경계점(boundary)에 있을 때 bias를 많이 줄일 수 있으며, 함수의 미분값들을 추정하기가 더욱 용이하다는 장점을 가지고 있다.[21] 식 (14)에서 사용된 kernel function $K(\cdot)$로는 표준정규분포의 확률밀도함수 $K(x)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$을 사용하였다.[22] 한편 bandwidth parameter로는 선택의 자의성을 줄이기 위해 최적성(optimality)을 가진 것으로 문헌에서 널리 이용되는 cross-validation criterion을 최소화하는 값으로 사용하였다.

한편, $\hat{\lambda}$의 표준오차를 계산하기 위하여는(식 (15) 참조), Newey and West (1987)의 HAC estimator에서와 같이 Bartlett kernel function

$$k\left(\frac{j}{S_n}\right)=1-\frac{j}{S_n+1} \tag{17}$$

을 사용하였으며 lag truncation parameter로는 $S_n=[n^{1/4}]$의 값을 사용하였다.[23]

부분표본추정을 위해 부분표본의 개수는 $n=[cT^{1/6}]$, $[cT^{1/3}]$ 그리고 $[cT^{1/2}]$의 값들을 고려하였다($c=10$). 이 때 부분표본은 전체표본에서 같은 간격의 시점을 두고 추출되었다.[24] 이러한 부분표본의 선택은 관측치간의 의존성

20) 모형 (16)은 모형 (6)에서 $k=1$인 경우이다. 보다 일반적인 경우($k\geq 1$)는 비모수추정과정에 발생하는 계산상의 비용으로 인해 명시적으로 고려되지 않았다. 제한된 몇 종목에 대하여 $k=2$인 경우 Lyapunov지수를 추정하여 보았으나 결과는 $k=1$의 경우와 크게 다르지 않았다.

21) local polynomial추정량의 장점에 대해 보다 자세한 설명은 Hatsie and Loader(1993)의 논의 참조.

22) kernel function의 선택은 추정량의 소표본성질에 크게 영향을 미치지 않는 것으로 문헌에 알려져 있다.

23) lag truncation parameter의 선택에 대해서는 Newey and West(1987)을 참조.

24) 즉, equally spaced sub-samples를 고려하였다.

(dependency)을 최소화한다는 점에서 바람직하다.[25]

〈표 7〉은 20개 종목과 종합주가지수의 수익률에 대해 Lyapunov지수의 추정치와 그 표준오차를 나타내고 있다. 각 종목에 있어 Lyapunov지수의 추정치는 전체표본을 사용한 경우와 부분표본을 사용한 경우를 비교할 때 큰 차이가 없다는 것을 알 수 있다. 그러나 포항제철 또는 현대건설의 주가수익률처럼 전체표본추정치의 표본오차가 매우 큰 종목이 있기 때문에 부분표본추정치를 사용하는 것이 더욱 타당함을 알 수 있다. 부분표본 추정치를 기준으로 〈표 7〉의 결과를 보면, 고려된 모든 주식종목에 있어서 수익률의 Lyapunov지수 추정치는 −1.8에서 −3.4 사이의 값을 취하여 모두 유의적으로 陰의 값을 가진다는 것을 알 수 있다. 이러한 결과는 주식수익률의 동태적 특성은 더 이상 카오스적 특성을 가지지 않음을 함의하는 것이다.

한편 〈표 8〉은 각 주식가격의 로그값에서 시간추세를 제거한 후의 자료에 대해 Lyapunov지수의 추정치와 그 표준오차를 나타내고 있다. 앞에서 논의한 대로 본 연구에서 사용된 Lyapunov지수의 추정치와 그 표준오차가 타당성을 가지기 위해서는 분석대상이 되는 시계열이 안정적(stationary)임을 전제로 하고 있다. 따라서 〈표 8〉에서 제시된 결과가 타당하기 위해서는 각 주식가격의 로그값이 추세안정적(trend-stationary)임을 가정하여야 한다. 그러나 〈표 5〉의 결과는 고려된 모든 주식가격들의 로그값은 확률적 추세(stochastic trend)를 가지나 비확률적 추세(deterministic trend)는 가지지 않는 것을 보여 주고 있다. 그럼에도 불구하고 〈표 8〉의 결과를 제시한 것은 ADF검정은 다른 모든 검정과 마찬가지로 제2종 오류가 존재할 수 있으며, 따라서 결과의 완전성(completeness)을 위해서라고 할 수 있다.[26]

〈표 8〉의 추정결과를 보면 Lyapunov지수의 추정치는 대체로 음수이나 유의적으로 0과 다르지 않음을 알 수 있다. 이러한 현상은 시계열이 random walk와 같이 단위근을 가질 때 나타날 수 있는 현상으로 〈표 5〉의 결과와 양립한다고 할 수 있다. 따라서 추세가 제거된 로그 주식가격도 또한 카오스적 특성을 보이지 않으며 오히려 단위근과정(unit root process)의 특성을 보인다는 것을 알 수 있다.

---

25) 구체적 논의는 Whang and Linton(1998) 참조.

26) 실제로 많은 카오스 문헌에서 자료의 안정성이 의심될 때 추세를 제거하고 카오스의 존재 여부를 살피고 있다. 보다 자세한 논의는 Barnett and Chen(1988) 참조.

〈표 7〉 Lyapunov지수의 추정치 (log-difference)

| 종 목 | full sample | sub-sample | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $n \propto T^{1/6}$ | $n \propto T^{1/3}$ | $n \propto T^{1/2}$ |
| 삼성전자 | −1.9175 (0.0157) | −1.9006(0.0096) | −1.9231(0.0080) | −1.9143(0.0035) |
| 포항제철 | −1.8538 (5262.1) | −1.8602(0.0833) | −1.8528(0.0354) | −1.8548(0.0188) |
| 현대건설 | −2.3827 (18263.0) | −2.2560(0.1196) | −2.2980(0.0971) | −2.3384(0.0478) |
| 신 세 계 | −1.6292 (0.1227) | −1.6425(0.0474) | −1.6543(0.0247) | −1.6257(0.0117) |
| 진 웅 | −1.9054 (0.0518) | −1.8686(0.1464) | −1.9411(0.0595) | −1.9320(0.0352) |
| 새 한 | −3.2339 (1325.0) | −3.3282(0.1195) | −3.3689(0.0700) | −3.2426(0.0358) |
| 대한제당 | −2.4221 (243.2452) | −2.3666(0.0608) | −2.3827(0.0460) | −2.4090(0.0244) |
| 크라운제과 | −1.8066 (0.0154) | −1.8276(0.0323) | −1.8204(0.0160) | −1.8303(0.0083) |
| 방 림 | −2.0032 (412.64) | −1.8844(0.0850) | −1.9977(0.0661) | −1.9748(0.0336) |
| 신무림제지 | −2.1266 (0.1450) | −2.1484(0.1493) | −2.0515(0.0713) | −2.1913(0.0344) |
| 동성제약 | −2.1685 (0.1097) | −2.3377(0.0356) | −2.2087(0.0251) | −2.2055(0.0149) |
| 동양화재 | −1.7759 (0.0366) | −1.8608(0.0294) | −1.8206(0.0209) | −1.7726(0.0093) |
| 대우증권 | −1.8030 (0.0881) | −1.9094(0.0573) | −1.8421(0.0290) | −1.8135(0.0127) |
| 조흥은행 | −2.9018 (1012.4) | −3.0377(0.1172) | −2.9536(0.0676) | −2.9007(0.0291) |
| 건설화학 | −2.1844 (15708.8) | −2.1500(0.0818) | −2.1473(0.0497) | −2.1911(0.0306) |
| 대림통상 | −2.2067 (22.9292) | −2.1666(0.0263) | −2.2313(0.0304) | −2.1932(0.0137) |
| 만도기계 | −3.1229 (629.71) | −3.2603(0.1904) | −3.2635(0.0987) | −3.1870(0.0469) |
| 신 흥 | −2.2567 (0.1066) | −2.3013(0.0559) | −2.2376(0.0453) | −2.3039(0.0225) |
| 대한항공 | −2.5369 (0.0426) | −2.5389(0.0405) | −2.5449(0.0243) | −2.5571(0.0117) |
| LG상사 | −3.5549(1942989.4) | −3.4531(0.1808) | −3.7301(0.0850) | −3.6141(0.0464) |
| KOSPI | −2.0629 (523.028) | −2.0755(0.1094) | −2.0432(0.0447) | −2.0450(0.0241) |

〈표 8〉 Lyapunov지수의 추정치(log-detrend)

| 종 목 | full sample | sub-sample | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $n \propto T^{1/6}$ | $n \propto T^{1/3}$ | $n \propto T^{1/2}$ |
| 삼성전자 | −0.0030(0.0003) | −0.0027(0.0003) | −0.0031(0.0003) | −0.0029(0.0002) |
| 포항제철 | −0.0026(0.0004) | −0.0027(0.0003) | −0.0026(0.0002) | −0.0027(0.0001) |
| 현대건설 | −0.0005(0.0004) | −0.0004(0.0002) | −0.0004(0.0001) | −0.0005(0.0001) |
| 신 세 계 | −0.0028(0.0009) | −0.0022(0.0004) | −0.0026(0.0008) | −0.0020(0.0002) |
| 진 웅 | −0.0130(0.0022) | −0.0113(0.0016) | −0.0131(0.0020) | −0.0137(0.0019) |
| 새 한 | −0.0034(0.0009) | −0.0028(0.0012) | −0.0028(0.0011) | −0.0020(0.0003) |
| 대한제당 | −0.0139(0.0017) | −0.0155(0.0050) | −0.0131(0.0029) | −0.0111(0.0014) |
| 크라운제과 | −0.0065(0.0013) | −0.0122(0.0061) | −0.0050(0.0010) | −0.0043(0.0005) |
| 방 림 | −0.0018(0.0005) | −0.0017(0.0001) | −0.0017(0.0001) | −0.0017(0.0001) |
| 신무림제지 | −0.0031(0.0006) | −0.0030(0.0003) | −0.0030(0.0002) | −0.0029(0.0001) |
| 동성제약 | −0.0058(0.0008) | −0.0056(0.0004) | −0.0056(0.0003) | −0.0055(0.0002) |
| 동양화재 | −0.0015(0.0003) | −0.0018(0.0008) | −0.0014(0.0004) | −0.0014(0.0003) |
| 대우증권 | −0.0006(0.0002) | −0.0006(0.0002) | −0.0005(0.0001) | −0.0004(0.0001) |
| 조흥은행 | 0.0001(0.0003) | 0.0000(0.0002) | 0.0000(0.0001) | −0.0000(0.0001) |
| 건설화학 | −0.0079(0.0005) | −0.0079(0.0008) | −0.0079(0.0006) | −0.0079(0.0004) |
| 대림통상 | −0.0043(0.0004) | −0.0040(0.0007) | −0.0042(0.0005) | −0.0043(0.0003) |
| 만도기계 | −0.0024(0.0006) | −0.0024(0.0005) | −0.0023(0.0003) | −0.0025(0.0002) |
| 신 흥 | −0.0181(0.0013) | −0.0184(0.0016) | −0.0186(0.0011) | −0.0185(0.0007) |
| 대한항공 | 0.0002(0.0002) | 0.0002(0.0001) | 0.0002(0.0001) | 0.0002(0.0000) |
| LG상사 | −0.0015(0.0007) | −0.0014(0.0007) | −0.0012(0.0006) | −0.0008(0.0002) |
| KOSPI | −0.0016(0.0009) | −0.0006(0.0010) | −0.0027(0.0028) | −0.0002(0.0002) |

# V. 결 론

주식가격의 동태적 구조를 발견하기 위해서 지금까지 많은 연구가 진행되었다. 본 연구는 한국 주식시장에서 동태적 구조의 하나로 간주할 수 있는 카오스구조가 발견되는지 그 여부를 조사하였다. 만약 주식가격으로부터 도출된 수익률이 카오스과정을 따라 변동한다면, 카오스구조의 발견노력에 따라 어느 정도 단기예측은 가능할지 모르나, 장기예측은 초기조건 민감성의 특징에 따라 불가능하게 된다. 외국문헌에서도 주가지수의 카오스적 특성에 관해 논란이 많았으나 연구결과 카오스보다는 비선형구조가 있다는 방향의 결론이 우세한 실정이다.

카오스에 관한 실증분석결과에 대한 논란이 계속되고 있는 이유는 지금까지 카오스를 직접적으로 검정할 수 있는 방법이 개발되지 않았기 때문인데, 본고는 최근에 개발된 Whang and Linton(1998)의 카오스 직접검정법을 처음으로 한국의 주식가격에 적용·분석함으로써 이 분야의 논란을 마무리했다는 점에서 큰 의의가 있다.

이를 위해 본고는 한국 주식시장에 상장된 종목 중에서 20개 종목과 일일 종합주가지수를 선택하여 카오스적 행태를 분석하였다. 검정방법으로는 Hurst지수, correlation dimension, BDS통계량과 같은 간접적인 수단과 Lyapunov지수와 같은 직접적인 수단이 사용되었다. 간접적인 수단에 의한 검정결과는 종목별 주식가격이 random walk와 다른 어떤 비선형성을 보이고 있으나 그 구체적인 구조가 무엇인지는 말해 주고 있지 않았다.

그러나 Lyapunov지수측정법을 적용한 결과 20개 종목 및 종합주가지수의 최대Lyapunov추정치가 음의 값을 보임으로써 주식가격을 생성하는 동태적인 프로세스가 카오스적이라는 증거는 발견하기 어려웠다. 이러한 결과는 해외문헌 연구와도 일치하는 것으로, 우리 나라 주식가격의 동태적 움직임에서도 초기조건 민감성의 특성을 보이는 카오스는 관찰되지 않은 것으로 결론지을 수 있다.

# 參考文獻

1. 백웅기, “카오스 이론과 경제학”, 『복잡성 과학의 이해와 적용』, 삼성경제연구소, 1997a.

2. 백웅기, "업종별 주가지수의 카오스검정 및 비선형 예측", 『재무관리연구』 제14권 제1호, 1997b, pp.171-205.
3. 백웅기 · 황윤재, 『종목별 일일 주가지수에 대한 카오스검정 및 모형의 예측력 비교』, 연구보고서, 장은경제연구소, 1998.
4. Andrews, D.W.K. "Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation", *Ecnometrica*, Vol. 59, 1991, pp.817-858.
5. Andrews, D.W.K., and J.C.Monahan, "An Improved Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimator", *Econometrica*, Vol. 60, 1992, pp.953-966.
6. Barnett, W.A. and P.Chen, "The Aggregation-theoretic Monetary Agregates are Caotic and Have Strange Attractors: An Econometric Application of the Mathematical Chaos", in Barnett, W.A. *et al.* eds., *Dynamic Econometric Modelling*, Proceedings 3rd International Symposium in Economic Theory and Econometrics, Cambridge University Press, 1988, pp. 199-246.
7. Barnett, W.A., A.R.Gallant, M.J.Hinich, J.A.Jungeilges, D.T.Kaplan, and M.J.Jensen, "A Single-blind Controlled Competition among Tests for Nonlinearity and Chaos", *Journal of Econometrics*, Vol. 82, 1997, pp.157-192.
8. Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol. 31, 1986, pp.307-327.
9. Brock, W.A., W.D.Dechert, B.LeBaron, and B.Scheinkman, "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", *Econometric Reviews*, Vol. 15, 1996, pp.197-235.
10. Chan, K.S. and H.Tong, "A Note on Noisy Chaos", *Journal of the Royal Statistical Society, Series B,* Vol. 56, 1994, pp.301-311.
11. Cheng, B. and H.Tong, "On Consistent Nonparametric Order Determination and Chaos", *Journal of the Royal Statistical Society, Series B,* Vol. 54, 1992, pp.427-449.
12. Dechert, W.D. and R.Gencay, "Lyapunov Exponents as a Nonparametric Diagnostic for Stability Analysis", *Journal of Applied Eco-*

*nometrics,* Vol. 7, 1992, pp. S41-S60.

13. De Jong, R.M., and J.Davidson, "Consistency of Kernel Estimators of Heteroskedastic and Autocorrelated Covariance Matrices", *Center Discussion Paper*, No. 9652, Tilburg University, 1996.
14. Gallant, A.R., *Nonlinear Statistical Methods,* Wiley, 1987.
15. Grassberger, P. and I.Procaccia, "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", *Physica 9D,* 1983, pp.189-208.
16. Guckenheimer, J., "Noise in Chaotic Systems", *Nature,* Vol. 298, 1982, pp.358-361.
17. Hansen, B.E., "Consistent Covariance Matrix Estimator for Dependent Heterogeneous Processes", *Econometrica,* Vol. 60, 1992, pp.967-972.
18. Hatsie, T. and C.Loader, "Local Regression: Automatic Kernel Carpentry", *Statistical Science,* Vol. 8, 1993, pp.120-143.
19. McCaffrey, D., S.Ellner, A.R.Gallant, and D.Nychka, "Estimating the Lyapunov Exponent of a Chaotic System with Nonparametric Regression", *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 87, 1992, pp.682-695.
20. Newey, W.K. and K.D.West, "A Simple Positive-definite, Heteroskedastic and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix", *Econometrica,* Vol. 55, 1987, pp.703-708.
21. Nychka, D., S.Ellner, A.R.Gallant, and D.McCaffrey, "Finding Chaos in Noisy Systems", *Journal of the Royal Statistical Society B,* Vol. 54, 1992, pp.399-426.
22. Peters, E., *Chaos in Order in the Capital Markets,* Wiely, 1991.
23. Ramsey, J.B., C.L.Sayers, and P.Rothman, "The Statistical Properties of Dimension Calculations Using Small Data Sets: Some Economic Applications", *International Economic Review,* Vol. 31, 1990, pp.991-1020.
24. Wegman, E.J., "On Randomness, Determinism and Computability", *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 10, 1988, pp.279-294.

25. Whang, Y.J. and O.Linton, "The Aysmptotic Distribution of Nonparametric Estimates of the Lyapunov Exponent for Stochastic Time Series", Cowles Foundation Discussion Paper, Yale University, forthcoming in *Journal of Econometrics*, 1998.

26. White, H., *Asymptotic Theory for Econometricians,* Academic Press, 1984.

27. Wolf, A., J.B.Swift, H.L.Swinney, and J.A.Vastano, "Determining Lyapunov Exponents From a Time Series", *Physica D*, Vol. 16, 1985, pp.285-315.