市場均衡의 安定條件과 變數變換

金　俊　輔*

머 릿 말

商品의 市場均衡關係에 있어서 價格(P)과 數量(Q)을 變數變換하였을 때 그 動學的 體系의 安定條件에 관하여 本質的 差異를 갖지 않을 것인가, 이 점은 당장 Leontief의 投入産出體系에 있어서 現實的 應用의 意味를 보여주고 있다. 그밖에 순수한 理論的 處理에 있어서도 均衡의 安定性 評價는 方法論上 하나의 統一的 把握을 위한 技術的 條件과 관련하여 자못 注視되는 分野의 문제이다. 따라서 이점에 寄與하고자 우리는 여기에 우선 單一商品市場에 관한 Walras型을 出發點으로 하여 그것의 變換形式으로서의 Marshall型을 비교한 다음, 條件을 一般市場에 擴大하여 문제의 全貌를 再檢討하고자 意慾한다. 그것은 필경 Hicks로부터 시작하여 Samuelson, Lange등에 의한 이 方面의 業績을 살피되 理論과 現實의 乖離가 있다면 그것의 큰것이 무엇인가를 追究할 수 밖에 없는 노릇이다.

한편 끝으로 市場均衡의 固有한 分野를 떠나서 단순한 變數變換과 安定條件에 관한 몇가지 特例를 Samuelson에 따라서 提示한다. 이 또한 묻는 바 安定條件의 理論的「不安定性」을 反證하고자 하는 試圖일 뿐이다.

Ⅰ. 單一商品市場의 安定條件

지금 一般의 例에 따라서 完全競爭下의 部分均衡的 動態를 다음과 같이 놓고 본다. 즉

需要函數 $Q_D = \alpha + aP_D$, 供給函數 $Q_S = \beta + bP_S$에서 價格의 時間(t)的 變動은 (超過供給의 경우 下落한다고 보아서)

* 高麗大 政經大 敎授

$$\frac{dP}{dt} = -K(Q_s - Q_D) = K(\alpha - \beta) - K(b - a)P,\ \text{즉}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(P - \overline{P})}{dt} = -K(b-a)P$$ (단, K는 speed of response로서 正數의 性質).

따라서 이 때에 均衡의 安定條件(stability condition)은

$$(b-a) > 0 \qquad (1) \qquad\qquad \text{또는}\ -K(b-a) < 0 \qquad (1)'$$

로서, 즉 이의 경우에 限하여 價格 P는 均衡價格 $\overline{P}$에 近接한다. ——이것이 곧 Walras의 市場模型이다.

다음에 곧 위의 1次變換型으로서 이른바 Marshall型을 보건데 이 型의 需要函數와 供給函數는 흔히 다음과 같이 놓고 본다. 즉,

$$P_D = \frac{Q_D - \alpha}{a,} \qquad\qquad P_S = \frac{Q_S - \beta}{b,}$$

그리고 이數量變動式은 위의 例에 따라서

$$\frac{dQ}{dt} = -K(P_S - P_D) = K\left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right) - K\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)Q,$$

$$\text{즉}\ \frac{dq}{dt} = \frac{d(Q - \overline{Q})}{dt} = -K\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)Q$$

이며, 이때에 均衡의 安定條件은 단순히 a, b의 定數에 관하여

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) > 0 \qquad (2)$$

$$\text{또는}\ -K\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) < 0 \qquad (2)'$$

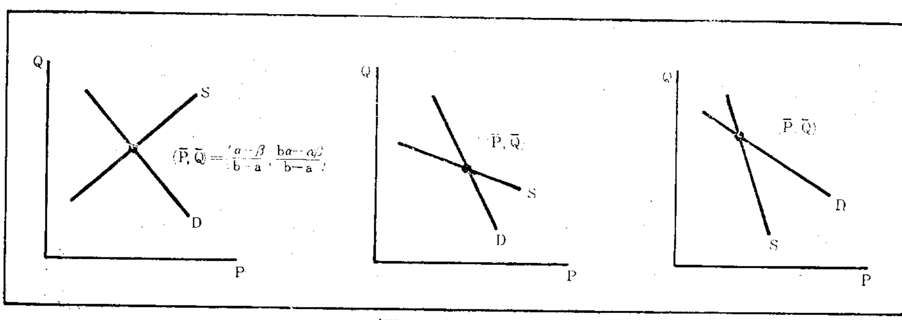
로서 前後兩型間에 數理上 本質的 差異는 없다고 보아온 것이 慣例이다.

그러나 좀더 살펴볼 때 여기 하나의 市場에 있어서 需要 供給의 均衡點($\overline{P}$, $\overline{Q}$) 또는 ($\overline{Q}$, $\overline{P}$)이 얻어지면 Walras型이건 Marshall型이건 經濟面의 性格이 같을 것으로 기대됨에도 불구하고, 兩者의 物理的 安定性에 관한 限, 반드시 그렇지는 않다. 同一場所의 同一均衡點이라 하더라도 需要函數와 供給函數의 構造에 따라서 다를 수도 있다는 것, 즉 하나의 型이 安定的일 때 다른 型이 不安定일 수도 있다는 것을 위의 數理的 分析이 가리키는 까닭이다. (다음 狀況表 및 圖式參照)

各 同一均衡點에서의 狀況(供給函數基準)

	$b>0$	$b<0$	
		$(-b)<(-a)$	$(-b)>(-a)$
Walras型	安　定	安　定	不　安　定
Marshall型	安　定	不　安　定	安　定

R.G.D. Allen, 「Mathematical Economics」, 1956, p.21



(需要曲線 a<0은 不變)

우리는 위의 結果를 어떻게 보아야 할것인가?

形式的으로 判斷한다면 現實的 在庫量의 增減과 價格關係의 變動樣態에 前後變動이 없는 限, 均衡點의 存在性과 安定性의 與否는 別途로 보아서 무방할 것도 같다. 말하자면 一見, 위의 結果에 아무런 矛盾은 없는 것과 같은 論理이다. 그러나 均衡點의 本性을 經濟的 次元에서 살펴 볼 때 거기에 하나의 難點이 지적된다. 왜냐하면 市場의 均衡點이란 當初 주어진 需給狀況에 따라서 時間的으로 落着된 一種의 極限値로서의 不動點(fixed point)[1]을 뜻하는 것이나, 그것이 일단 決定된 然後에 그 樣態가 어떠하리라는 新方向을 말할 수 없는 노릇이다. 그러므로 앞에서와 같은 단순한 變數變換에 의하여 얻어진 均衡値의 安定條件論은 따로 어려운 動態條件을 假定하지 않는 限, 現實的으로 成立될 수 없다고 우리에게는 보아진다. 傳統的 安定條件論이란 바로 第2의 均衡點을 찾는 方式以外에 다른 것이 아닌 까닭이다. (다음 參照)

더구나 우리는 現實目的上 Walras型과 Marshall型을 對照한다 하더라도 變數變換의 方式을 위와 같이 機械的으로 逆函數를 想定할만한 方式은 거의 사실상 있을 수 없다. 이 점, 다음의 一般化한 分析에 있어서도 절실히 물어지는 現實的 市場經濟의 難點이다.

Ⅱ. 傳統的 市場分析의 一般化

위의 Walras型을 擴張하여 多數商品의 市場變動에서 살펴볼 때 문제는 再確認

될 수 있다. 우선 그 形式을 보면 곧 다음과 같다.[1] 즉,

$$\dot{p}_i=\frac{dp_i}{dt}=-K_i(S_i-D_i)=-K_iq_i \qquad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

$$=-K_i[S_i(p_1,\cdots\cdots p_n)-D_i(p_1,\cdots\cdots p_n)]=K'\sum_{j=1}^{n}a^0{}_{ij}(p_j-p^0{}_j)+\cdots\cdots\cdots(3)$$

[단, $a^0{}_{ij}=\dfrac{\partial q_i(p^0{}_1,\cdots p^0{}_n)}{\partial p_j}$ 로서 常數 p^0은 均衡値]

위의 解(定常解)는 $p_i(t)=p^0{}_i+\sum_{j=1}^{n}X_{ij}(t)e^{-\lambda_j t}$ 인바, 여기에서 X_{ij}는 初期條件에 의하여 결정되는 多項式(polynomial)이고, λ_j는 다음의 特性方程式體系에서의 각 特性(固有)値(characteristic root)이다. 즉 이의 特性方程式體系는 行列式으로 표시하여

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} k'_1a^0{}_{11}-\lambda & k'_1a^0{}_{12}\cdots\cdots\cdots k'_1a^0{}_{1n} \\ k'_2a^0{}_{21} & k'_2a^0{}_{22}-\lambda\cdots\cdots k'_2a^0{}_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ k'_na^0{}_{n1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & k'_na^0{}_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} =|k'a-\lambda I|=|k'a^0{}_{ij}-\lambda\delta_{ij}| \\ =0, \end{matrix} \qquad (4)$$

[단, δ_{ij}는 크로네카 符號]

그리하여 이 型(式3)의 均衡値로서 그의 安定條件은 바로 式(4)에서 얻어진 實根이 모두 陰數(마이너스)이어야 한다는 것, 즉

$$R(\lambda_j)<0 \qquad (5)$$

이 必要하고도 充分한 條件이다. 따라서 前揭 單一商品市場으로 돌아가서 보면 그것은 곧 式(1′)로서 $k'_1a^0{}_{11}=-k(b-a)=\lambda<0$으로 되고[2], 式(2′)에서는 $-k(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})=\lambda<0$으로 될 뿐이다.

그런데 한편 P. Samuelson등은 위의 式(3)의 動態體系를 展開함에 있어서 이와 對比하여 더욱 J. Hicks의 本來的 靜態體系의 安定條件을 技術的으로 批判함으로써 式(5)의 安定條件을 試圖한 것이 有名하다. 즉 Hicks의 均衡條件[3]은

$$\frac{d(Q_{0i}-Q_{0j})}{dp_i}=a_{i1}\frac{dp_1}{dp_i}+\cdots+a_{ii}+\cdots+a_{in}\frac{dp_n}{dp_i}<0$$

$$\frac{d(Q_{Dj}-Q_{Sj})}{dp_i}=a_{j1}\frac{dp_1}{dp_i}+\cdots+a_{ji}+\cdots+a_{jn}\frac{dp_n}{dp_i}=0$$

[단, $i,\ j=1,\cdots,n,\ Q_{Dj}-Q_{Sj}=q_j\ (p_1,\ \cdots,p_n)$]

에서 얻어진 均衡値의 安定條件(Hicks의 完全安定條件, perfect stability condit-

$$[a^0_{ii}]<0;\begin{pmatrix} a^0_{ii} & a^0_{ji} \\ a^0_{ij} & a^0_{jj} \end{pmatrix}>0;\begin{pmatrix} a^0_{ii} & a^0_{ij} & a^0_{ik} \\ a^0_{ji} & a^0_{jj} & a^0_{jk} \\ a^0_{ki} & a^0_{kj} & a^0_{kk} \end{pmatrix}<0;\cdots=\mathrm{sign}(-1)^n \qquad (6)$$

이 自身의 動態的 安定條件(式5)과 같은 性質을 갖게되려면 Hicks의 體系가 對稱的이어야 한다는 것, 즉 式(6)에서 例컨대 $a^0_{ij}=a^0_{ji}$와 같이 되어야 한다는 것이 지적된 내용이다[4]. 더욱 Samuelson은 나아가서 式(3)의 Walras 動態體系에 돌아가되[5] $K_i=K'_i>0$의 前提下에 行列形式으로 다음과 같이 p와q를 代替表示한다. 즉 $q=ap$ [단, q와 p는 列벡타이고 a는 要素 a^0_{ij}의 行列]로 놓고

$$p=kq+\cdots=kap+\cdots \qquad (7)$$

에서 보다 一般的 變數變換의 方式을 취하여 본다. 그리하여 本來의 價格 및 數量을 곧 p 및 q로 놓고, 變換後의 價格 및 數量을 $\bar{p}$ 및 $\bar{q}$로 놓고 볼 때 安定條件을 가리키는 固有値(特性根)의 性質이 不變이라는 것을 立證한 요령이다. [4] 즉 그의 결과를 우선 간단히 표시하여 보면

$$\dot{p}=\bar{k}\bar{q}+\cdots=c'k\bar{q}+\cdots=\bar{k}\bar{a}\bar{p}+\cdots=(c'kac'^{-1})\bar{p}+\cdots \qquad (8)$$

[단, c는 變換要因으로서의 行列]

로서 變換前의 p에 대한 行列 ka와 變換後의 $\bar{p}$에 대한 그것이 本質的으로 그대로 주어진다는 것이나, 과연 문제의 安定條件을 이렇게 擴大適用할 수 있을 것인가?

Ⅲ. 變數變換의 方法과 評價

當面한 一般的 動態體系에 있어서 이른바 變數變換의 方式은 理論上 無數히 存在한다하겠으나 위의 式(8)과 같은 결과는 사실인즉 다음과 같은 特殊한 形式下에 限定的으로 이루어진다. 즉 商品의 價格 p와 數量 q가 1次變換(linear transformation)形式을 취할 때 變換前後의 內積(實積計 inner product)이 不變으로서

$$\sum^n p_i q_i=\sum^n \bar{p}_i \bar{q}_i \qquad (9)$$

의 關係가 成立되는 條件인 것이다. 이를 흔히 對立變換(contragredient transformation)이라함은 周知하는 바이다. [6]

위의 對立變換의 方式을 採用하되 이를 다시 行列(또는 벡타)을 써서 표현하고 보면 다음과 같다. 즉

$$q=c\bar{q};\ \bar{q}=c^{-1}q;\ p=c'^{-1}\bar{p};\ \bar{p}=c'p \qquad (10)$$

당연히 얻어지는 결과이다.

그러나 여기에 다시 注目되는 점은 비록 위의 對立變換의 요령이 觀念上 一般的變換方式임에 틀림이 없다하더라도 그에 의할 때 I에서 본 바 安定條件의 評價上 矛盾이 內在되어 있음에는 다름이 없다. 더욱 式(9)의 단순한 形式 역시 單一商品市場에 관한 變數變換의 靜態的 非現實性을 示唆하고 있을 뿐이다.

한편 Samuelson 自身에 따라서 價格의 下落이 現在의 在庫量(供給의 需要超過)에 依存하지 않고, 在庫가 一定時間을 經過하면서 均衡量을 넘은 蓄積分에 依存한다는 模型을 꾸며보면 앞에서의 式(3)과는 달리

$$P_i = Q_{0i} - \int_0^t (q_S - q_D)\,dr = Q_i^0 + \int_0^t \sum_{j=1}^n a^0_{ij}(p_j - p^0_j)\,dr + \cdots$$

즉, $\ddot{p}_i = \sum_{j=1}^n a^0_{ij}(p_j - p^0_j) + \cdots$

에서 이번에는 다음과 같은 一般解를 얻게된다.〔7〕 즉

$$p_i(t) = p^0_i + \sum_{j=1}^n \left(A_{ij} e^{\sqrt{\lambda_j}t} + B_{ij} e^{-\sqrt{\lambda_j}t}\right) \tag{11}$$

〔단, A 및 B는 初期條件에 의하여 결정되는 常數〕

그렇다면 여기에 特性根 λ를 $|a^0_{ij} - \lambda_j \delta_{ij}| = 0$에서 구하여 式(11)에 넣고볼 때 모든 $\sqrt{\lambda_j}$가 純虛數가 아닌 경우, 즉 λ_j가 모두 「마이너스」의 實數가 아닌 경우, 不安定狀態(unstable, explosive and undamped)라는 것, 그리고 반대로 $R(\lambda_j) < 0$의 경우라도 固有한 安定狀態에 있지않고, 均衡點을 中心으로 上下運動을 계속하는 경우(stability condition of the second kind)도 있다는 사정을 알 수 있다. 다만 이때에 역시 이 體系가 對稱的인 경우라면 本來의 第1種 安定條件(stability condition of the first kind)은 주어지게 마련이나〔5〕, 요컨대 式(5)로 표시된 安定條件이란 可變的 市場均衡下에 상당한 限界性을 갖는 命題임이 뚜렷하다. 式(11)에 對應한 경우를 포함하여 좀더 前提條件을 現實化하여 擴張하고 볼 때 $R(\lambda) < 0$이 비록 安定上必要條件이기는 하나 간단히 充分條件이라 할 수 없는 경우를 豫想할 수 있기 때문이다.

Ⅳ. 特殊函數의 變數變換과 安定條件

動態的 均衡關係에 있어서 安定條件의 不安定性은 더욱 다음과 같은 形式的 變數變換의 特例에서 한결을 具體的으로 確認될 수 없지 않다. 즉 特殊한 變動形式

$$\dot{p}=p(1-p) \tag{12}$$

를 얻었다 할 때 그의 現存狀態 $p-p^2=0$에서 (均衡値 $\bar{p}$로서) 우리는 0과 1을 얻는 것이나 이 때에 式(12)의 一般解로서 우리는 이른 바 Logistic law

$$p=\frac{1}{1+Ke^{-t}} \tag{13}$$

를 얻게된다는것은 유명하다.

그런데 우리는 한편 一定한 技術的 處理에 의하여[6], 式(13)을 좀더 具體化하여

$$p=\frac{1}{1+\frac{1}{a}\ e^{-t}}=\frac{ae^t}{1+ae^t} \tag{14}$$

$$〔단,\quad |ae^t|>1〕$$

와 같이 展開해 놓고 볼 수 없지않다. 그렇다면 결국 처음 두 均衡値가운데 $\bar{p}=0$은 式(14)에서 不安定的임이 분명하다. 그것은 주어진 前提下에 式(14)의 右邊이 時間 t의 增加와 더불어 0에 1收斂하지 않기 때문이다.

그러나 만약 위에서 우리가 p를 變數變換하여

$$y=p-1$$

로 놓고 보면 이번에는

$$y=\frac{1}{1+Ke^{-t}}-1 \tag{13}$$

로 되어서 당연히 $\lim\limits_{t\to\infty}y=0$으로 결과는 安定化하고 만다. 따라서 動態的 均衡値의 安定性이란 흔히 이와 같이 可變的이고, 相對的이라는 것이 우리에게 새삼銘記되는 命題이다. 여기에 一般均衡論이 흔히 精力的으로 追求하는 바 動學的 安定條件이란 것이 그다지 固有한 意味를 갖는 것이 못된다는 점을 再確認하지 않을 수 없다. 그가 經濟의 實質的 變動없이 可變性을 보여줄 수 있다는 것이라면 變數變換의 意味는 制約될 수 밖에 없기 때문이다.

參 考 文 獻

〔1〕 O. Lange, *Price Flexibility and Employment.* 1944, appendix, p.p. 94～96
〔2〕 P. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, 1958, p. 271
〔3〕 J. Hicks, *Value and Capital*, 1938, appendix, p.p. 319～320
〔4〕 P. Samuelson, *ibid.*, p.p. 272～273
〔5〕 P. Samuelson, *ibid.*, p.p. 274～275
〔6〕 P. Samuelson, *ibid.*, p. 274
〔7〕 P. Samuelson, *ibid.*, p. 275