不確實狀態下에서의 效用極大化

—資產選擇 理論을 中心으로—

尹 起 重

(延世大學校 商經大學·助教授)

차 례

Ⅰ. 序 言

選擇의 指標를 效用에 두고 그 效用을 序數的(ordinal)으로 可測할 수 있는 것이라면 所要된 消費支出豫算의 制約下에 그 效用을 極大化할 수 있는 두 財貨의 結合 選擇基準은 각 財貨間의 價格比率과 限界效用比率 (또는 商品代替率)을 같게 하는 것으로서 얻어진다. 즉 效用函數$U=f(q_1, q_2)$와 消費支出豫算의 制約式 $\bar{W}=q_1p_1+q_2p_2$에서 $f_1/f_2=p_1/p_2$를 導出하여 이로서 效用極大의 基準을 삼는다. $\left(\text{단; 이때 } -\frac{dq_2}{dq_1}=\frac{f_1}{f_2}\right)$ 그러나 財貨의 購入時期와 使用時期간에 時間隔差가 있어 效用이 변한다면 위와 같은 選擇基準은 무의미할 것이다. 이와 같이 장래의 사태란 여러가지의 與件및 條件들이 변하기 때문에 不確實한 것이다. 그러기 때문에 「케인즈」는 장래의 收益을 목적으로 하는 投資基準을 資本의 限界效率에 의하여 구하고 이는 다시 豫想收益率로서 표현하고 있는바 이때 豫想收益率은 장래의 事態가 不確實하기는 하나 價格機構가 安定되어 있고 資本의 陳腐率이 높기때문에 一定期間에 豫想收益率과 資本의 限界效率간에 큰差가 있을 것으로는 짐작되지 않는다.

어쨌든 豫測할 수 없는 장래에 대하여 더욱이 證券投資의 경우 合理的인 選擇이 切實이 요청되고 있다. 이때의 문제는 각種資產에 따라 不確實한 장래에서의 收益의 차이다. (勿論 負의 收益도 包含) 그러므로 어떠한 指標에 의하여 選擇投資할 것인가의 문제가 제기되나 여기에는 投資家 (또는 消費者인 支出單位 spending unit)의 性格에 따라 相異할 것이 假想된다. 즉 어떠한 投資家는 risk averse일것이고 또 risk lover도 있을 것이며 아니면 中立的(neutral)인 사람도 있을 것이다. 그러기 때문에 投資家의 效用을 基數的 指標 (cardinal index)로서 單位當收益率과 그의 分散으로 規定하고 (事後的으로) 一定投資期間에 대한 資產選擇을 위의 두 指標에 의하여 구하려 하는 이도 있다. 이때 基數的指標로서 收益率과 그의 分散에 두고 있는 것은 각種資產에 따르는 單位當收益率을 確率變數로 導入하고 이들 變動을 確率分布(probability distribution)로 전제한 것은 원칙적으로 이에 관심있는 學者들의 대부분이 받아 들이고 있는 것같다.

이때 標準偏差나 또는 變異係數는 相對的 危險率의 測定値이기 때문에 期待收益率과 더불어 이들 두 parameter는 資產選好에 대한 唯一한 基數的 指標인 것이다. 즉 이두 parameter는 장래의 不確實狀態에 있어서 危險을 隨伴하는 資產 (portfolio를 뜻함)의 價格, 合理的

인 選擇基準및 購入豫算制約下에서의 適切한 選擇基準등을 表現하여 주고 나가서 이러한 投資家行動効果의 分析道具로 이용되고 있다.

Ⅱ. 前 提

資產을 安定資產(銀行預金등) B_0과 危險資產(株式社債등) B_i $(i=1, 2, \cdots n)$로 그리고 이들 portfolio를 $x_0, x_1, x_2, \cdots x_n$로 하면 이의 資產總額 Y는 이를 x_i의 合計$\left(Y=\sum_{i=0}^{n} x_i\right)$로 表現되고 또 危險資產額 Y_0는 安全性을 지닌 portfolio x_0를 제외한 나머지 것의 合計$\left(Y_0=\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$이고 이들의 장래에 있어서의 收益을 R로 한다면 이의 期待收益 $M=E(R)$와 分散 S^2은:

$$S^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j \qquad (i=0, 1, \cdots, n)$$

危險 portfolio의 장래收益은 r, 期待收益 m은 $m=E(r)$, 그 收益의 分散 σ^2은

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j \quad (i=1, 2, \cdots n)$$ 로 표현 된다.

그리고 각種資產의 장래收益 $r_0, r_1, r_2, \cdots\cdots r_n$의 期待收益 μ_i과 그의 分散 σ_{ij}^2은;

$$\mu_i=E(r_i)$$

$$\sigma_{ij}^2=E\ (r_i-\mu_i)\ (r_j-\mu_j)$$

r_0의 期待値는 安定資產이기 때문에 즉 一定利子率이 保障되었기 때문에 將來收益과 期待收益은 같게 된다.

그리고 다른 하나의 前提는 物價變動은 없는 것을 前提하기 때문에 capital gaine이나 capital loss는 없는 것으로 한다.

Ⅲ. 資產選好에 따르는 收益 locus

이상에서의 資產가운데 간단이 하기 위하여 여기에 安定資產 B_0와 危險資產 B_1, B_2만을 想定하고 보면 形態別資產額은;

(1) $\qquad Y=x_0+x_1+x_2$

(2) $\qquad Y_0=x_1+x_2$

이때 각資產의 期待收益을 $0<r_0<\mu_1<\mu_2<\infty$ 으로 가정하고 또 그의 分散도 $0<\sigma_1^2<\sigma_2<\infty$ 관계에 있고 이들간의 相關關係는 $-1<\rho<1$의 범위에 있다고 하자.

a) 그러면 危險 portfolio의 期待收益 m은;

(3) $\quad m=x_1\mu_1+x_2\mu_2$

그리고 이 期待收益의 分散 σ^2은;

(4) $\quad \sigma^2=\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2+2\sigma_{12}x_1x_2$

위의 (1) (3)및 (4)式과 $\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}>0$의 관계에 의하여 危險 portfolio의 收益 locus는;

(5) $\quad \sigma^2-\sigma_0^2=\alpha\{m-m_0\}^2$

을 얻는다. 이때 σ_0^2, m_0 및 α를

(6) $\quad \sigma_0^2=\dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}(Y_0)^2$

(7) $\quad m_0=\dfrac{(\sigma_2^2-\sigma_{12})\mu_1Y_0+(\sigma_1^2-\sigma_{12})\mu_2Y_0}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}$

(8) $\quad \alpha=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}{(\mu_1-\mu_2)^2}$

하면 (5)式의 收益 locus의 漸近線은

(9) $$m-m_0=\pm\frac{\mu_1-\mu_0}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1^2)^{\frac{1}{2}}}\sigma$$

을 얻는다.

b) 또 "安定 portfolio" B_0와 危險 portfolio B_1, B_2 가운데 하나의 portfolio θ와의 期待收益과 分散을 m' σ'^2으로 하면 將來收益 R은;

(10) $$R=r'Y_0+r_0(Y-Y_0)$$

(11) $$E(R)\equiv M=(m'-r_0)Y_0+r_0W$$

(12) $$\text{var }(R)\equiv S^2=Y_0^2\sigma'^2$$

이때

(13) $$m'\equiv E(r)=\sum_{i=1}^{2}\mu_i x_i$$

(14) $$\sigma'^2\equiv \text{var}(r)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sigma_{ij}x_ix_j$$

(15) $$\sigma'^2-\sigma_0^2=\alpha\{m'-m_0\}^2$$

이며 (11)과 (12)式에 의하여 收益 locus는;

(16) $$M-r_0Y=\left|\frac{m'-r_0}{r'}\right|s$$

을 얻는다.

c) 이상에서 본바에 따라 portfolio의 收益의 locus는 다음 그림 (그림 1)과 같이 표현되며 위에서의 θ 또한 다음과 같이 표현된다.

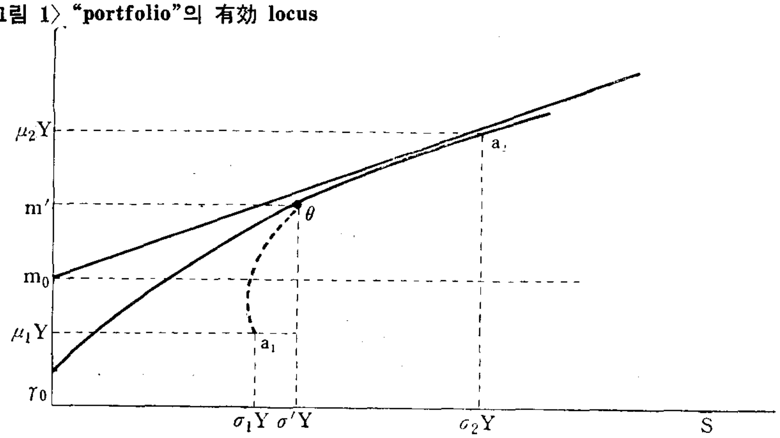
(17) $$\theta=(x_1', x_2')=\left(\frac{m'-\mu_2Y_0}{\mu_1-\mu_2},\ \frac{\mu_1Y_0-m'}{\mu_1-\mu_2}\right)$$

$$\text{단; } m'=\frac{(\mu_1-\mu_2)^2\sigma_0^2}{(r_0-m_0)c}$$

$$\sigma'=\frac{cm'(m'-r_0)}{(\mu_1-\mu_2)^2}$$

이때 $c=\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}$ 그리고 $x_1'+x_2'=Y_0=Y$ 이다.

〈그림 1〉 "portfolio"의 有効 locus



證券등의 protfolio 投資家로서 將來收益에 대한 基數的 効用函數(function of cardinal uitility)는;

(18) $U=U(R)$

이때 $R\equiv E^{-1}M=r_0x_1+r_1x_1+r_2x_2$ 이고 U는 R에 대하여 連續的 微分可能한 一價函數라는 效用函數에서의 가정을 전제하고

(19) $$\frac{d^2U}{dR^2}\equiv U''(R)=-k$$

단; $k=$定數$<\infty$

를 얻어 投資家의 性向에 따라 k를 다음과 같이 規定한다. 즉

risk averter $k>0$

risk neutral $k=0$

risk lover $k<0$

그리고 式(19)을 積分하여 二次의 效用函數를 얻으면;

(20) $$U(R)=-\frac{k}{2}R^2+k_1R+k_2$$

(단; k_i는 積分定數)

위(20)式에 의하여

(21) $$U=E(U)=U(M)-\frac{k}{2}s^2$$

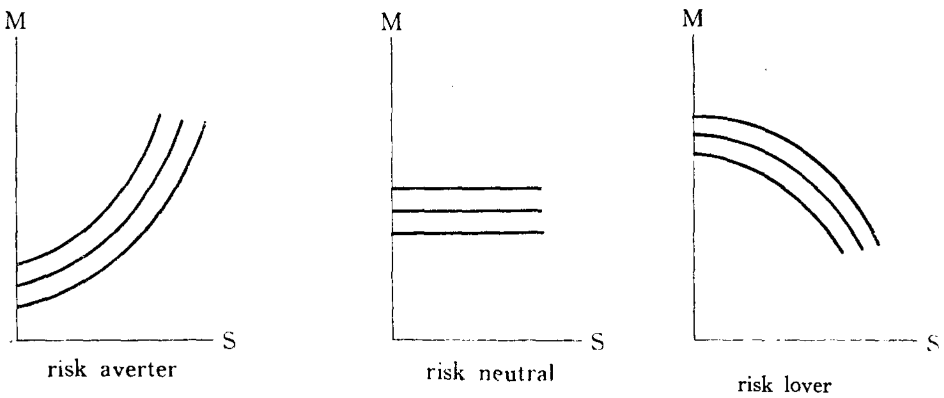
을 얻어 $U(0)=k_2=0$, $U(M)=M$로 하면

(22) $$U=M-\frac{k}{2}s^2$$

을 얻는다. 위에서 $U(0)=k_2=0$ $U(M)=M$는 選好의 規模確定을 위해서이다.

위(22)式을 s에 관하여 微分하고 보면 즉 $\frac{dM}{ds}=ks>0$, ($\sigma=0$일 경우는 $\frac{dM}{ds}=0$) $\frac{d^2m}{ds^2}=k>0$ 이므로 (22)式에서의 각 投資家 (또는 證券投資家)의 危險에따르는 收益 locus는 다음의 그림과 같이 표현된다.

〈그림 2〉 投資家別 收益 locus 推移

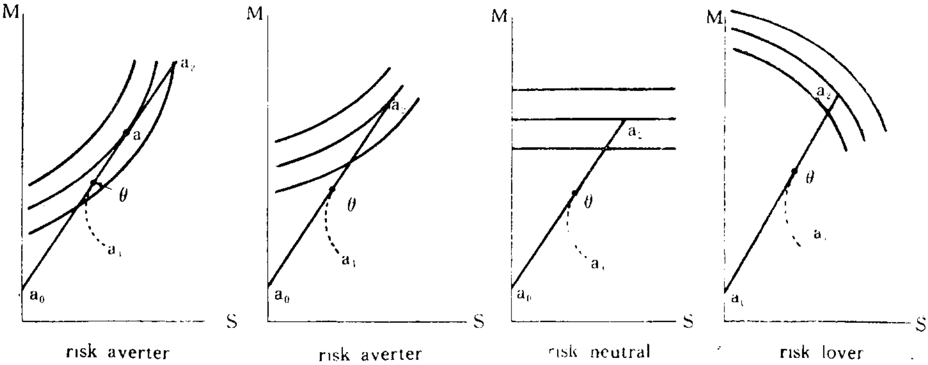


Ⅳ. 多樣化에 의한 最適化

a) 한 投資家가 하나의 資産을 選擇하지 않고 安全資産과 더불러 그 選好를 多樣하게 한다면 그 收益推移와 最適値는 다음 그린과 그리고 式(23)과 같이 된다.

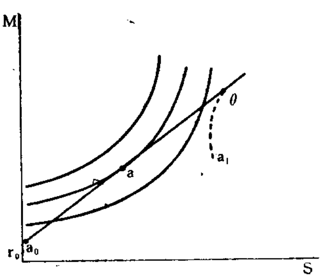
$$
(23)\quad \begin{cases} x_0=0 \\ x_1=\dfrac{k(\sigma_1{}^2-\sigma_{12})Y+\mu_1-\mu_2}{k(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2-2\sigma_{12})} \\ x_2=\dfrac{k(\sigma_1-\sigma_{12})Y+\mu_2-\mu_1}{k(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2-2\sigma_{12})} \end{cases}
$$

〈그림 3〉 性格別 收益推移



b) 最適化를 위하여 각資產을 組合한다 할지라도 그것은 任意의 두資產의 結合比率과 資產額 Y_0와는 獨立的이라는 分離定理(seperation theorem)의 土臺위에서; 즉 (附錄 b참조)

〈그림 4〉



$$(24)\quad U=M-\frac{k}{2}s^2$$

를

$$(25)\quad M=r_0x_0+m'Y_0=r_0(Y-Y_0)+m'Y_0$$

$$(26)\quad s^2=Y_0{}^2\sigma'^2$$

$$(27)\quad m'=f(\sigma')$$

의 條件下에 極大化하면

$$(28)\quad \frac{m'-r_0}{\sigma'}=kY_0\sigma'$$

$$(29)\quad \frac{m'-r_0}{\sigma'}=f'(\sigma')$$

의 1階의 條件을 얻는다. 그리하여 (1)(2) 및 (28) 式에 의하여

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} Y_0=\dfrac{m'-r_0}{k\sigma'} \\ x_0=Y-\dfrac{m'-r_0}{k\sigma'^2} \end{array}\right\} \text{을 얻는다.}$$

여기서 다시(17)式에 의하여 다음을 얻게된다.

$$x_2=\frac{\mu_1\dfrac{m'-r_0}{k\sigma'^2}-m'}{\mu_1-\mu_2}$$

$$x_1=\frac{m'-\mu_2\dfrac{m'-r_0}{k\sigma'}}{\mu_1-\mu_2}$$

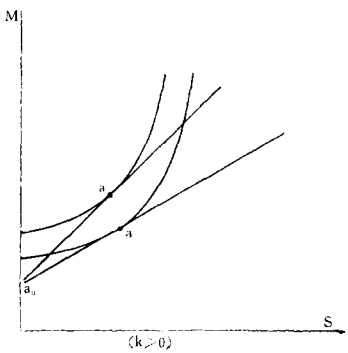
을 얻는다. 따라서 위(29)式과 더불어 "x_0와 Y_0의 決定(a點의 決定)은 x_1과 x_2와의 決定(θ點決定)과 獨立的"이라는 定理가 成立된다.

c) 끝으로 x_i들의 結合比率이 相異하짐에 따르는 收益決定決點의 移動關係를 보면 다음 式 같다. 즉

첫째로 (30)式에 의하여 安全資產의 경우;

$$\frac{\partial x_0}{\partial m'}=-\frac{1}{k\sigma'^2}<0$$

〈그림 5〉



둘째로 (9)式에 의하여

$$\frac{\partial}{\partial\mu_2}\left(-\frac{\mu_1-\mu_2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})^{\frac{1}{2}}}\right)>0$$

또 (7)式의 경우

$$\frac{\partial m_0}{\partial\mu_2}=\frac{(\sigma_1^2-\sigma_{12})Y}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-1\sigma_{12})^{\frac{1}{2}}}\gtreqless 0$$

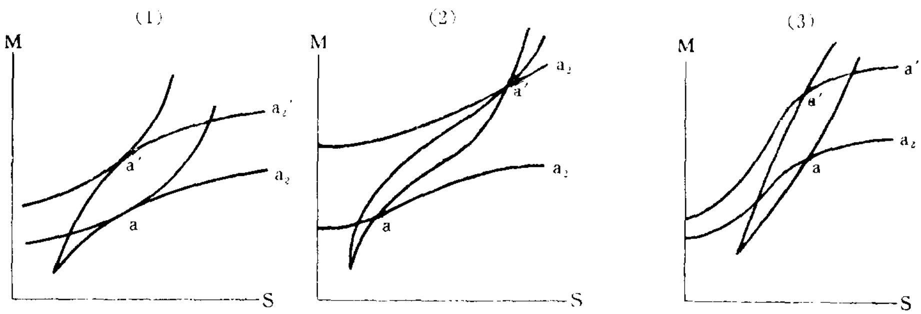
다음으로 (23)式에서는

$$\frac{\partial x_1}{\partial\mu_2}=\frac{-1}{k(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})}<0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial\mu_2}=\frac{1}{k(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})}>0$$

의 性格을 보여 주는바 그 危險과 收益에 대한 關係는 다음 그림과 같이 表現된다.

〈그림 6〉



(1)의 경우는 μ_2가 增加함에도 k는 不變이고 (2)의 경우는 μ_2增加에 따라 k는 減少하고 있으며 (3)은 μ_2가 增加함에 따라 k도 增加하고 있다. 그러므로 例로서 (11)의 경우 portfolio의 收益이 좋으면 a′를 選擇하게이 分明하다.

이상에서 본바는 安全資產을 포함한 2個 portfolio選擇에 있어 投資家의 行動指標로서의 分析에 不過한 locus의 기울기 分析이다. 물론 收益이 크고 기울기가 큰곳에 投資되이야 함이 要請된다.

—參 考—

1. J.M. Henderson & R.E. Quandt. *Micro Economic Theroy,* McGraw-Hil, 1958,

2. J. Lintner. "The valuation of Risk Assets—," *Review of Econ & Stat.*, Feb.

1965.,pp. 13~37

3. D. Patinkin;*Money, Intenest, and prices.*, Harper & Row inc, 1965 chapt. 4~7.
4. W.F. Sharpe; "Capital Assets Price; A Theory of Market Equilikrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance,* sept. 1964 pp. 425~442.
5. J. Tobin; "The theory of potrfolio selection" in F.H.Hahn & F.P.R. Brerchling (edts), *The theory of interest Rate.* The Macmillan Co., 1965 pp. 3~51
6. J.R. Hicks; "liquidity," *Economic Journal.* Dec. 1962 pp. 787~802
7. H.A. Latané; "Investment Criteria, A Three Assets portfolio Balance Model" *The Review of Econ. & Stat.* Nov. 1963 pp. 427~430
8. Seperotion theorem 의 證明등은 Lintner 와 Tobin 의 論文 參照.

<附 錄>

(a) 期待收益 m와 分散 σ^2

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \qquad e=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c=\begin{pmatrix} \sigma_{11} \cdots\cdots \sigma_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \sigma_{1n} \cdots\cdots \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

일때

(1) $e'x=y_0$

(2) $\mu'x=m$

(3) $x'cx=\sigma^2$

(b) 分離定理

效用極大化를 위한 것으로서 $e'x=Y_0$ 에따르는 極大化는

(4) $\max \left\{U=\mu'x-\frac{k}{2}x'cx\right\}$

lagronge's multiplier를 λ로하는 目的函數는

(5) $\varphi=\mu'x-\frac{k}{2}x'cx-\lambda(e'x-Y_0)$

이고 optimal portfolio는

(6) $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\frac{\partial U_i}{\partial x_i}-\lambda=0$

(7) $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=e'x-Y=0$

를 만족시키는 $x=x'\geq 0$ 로 하면 즉

$$(8)\quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \\ \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k\sigma_{11} \cdots\cdots k\sigma_{1n} & 1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \\ k\sigma_{1n} \cdots\cdots k\sigma_{nn} & 1 \\ 1 \cdots\cdots\cdots 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_n \\ \vdots \\ \mu_1 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

이때

$$(9)\quad \begin{pmatrix} k\sigma_{11} \cdots\cdots k\sigma_{1m} & 1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ k\sigma_{n1} \cdots\cdots k\sigma_{nn} & 1 \\ 1 \cdots\cdots\cdots 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \triangle$$

는 $x'cx$가 正値定符號, $k>0$라는 점에서 負値正符號임. 그리고 $\triangle$에서 $k\sigma_{ij}$ 및 1의 餘因子를 각각 $\triangle_{ij}$, $\triangle_{i,\,n+1}$로 하면

$$U=(M)=Y_0$$

$$U=e'x-\frac{k}{2}x'cx$$

$$(10)\quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\sigma_{11} \cdots\cdots k\sigma_{1n} & 1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ k\sigma_{n1} \cdots\cdots k\sigma_{nn} & 1 \\ 1 \cdots\cdots\cdots 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

(8) 式에 의하여

$$(11)\qquad x_i=\sum_{i=1}^{n} \frac{\triangle_{ij}}{\triangle}\mu_i+\frac{\triangle_{i,\,n+1}}{\triangle}Y_0$$

(9) 式에 의하여 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\triangle_{ij}}{\triangle}=0$ 이므로 이를 위 式에 代入하면

$$\frac{x_i}{x_j}=\frac{\triangle_{n+1,\,i}}{\triangle_{n+1,\,j}}$$

로서 資產의 結合比率은 資產額 Y_0과 獨立的임.