인플레이션 위험의 동태적 헤지*

김 희 호**

논문초록 이 연구는 시장에서 거래가 불가능한 인플레이션 위험이 존재할 때 투자수익의 변동위험을 커버하기 위해 최적 헤지가 어떻게 결정되는지 살펴보고자 한다. 특히, 인플레이션 위험을 고려할 때 자산 가격과 환율변화에 대한 실질수익 위험은 기간별로 서로 다른 비선형적인 행태를 보이게 된다. 이 경우 단순한 선물매도헤지 보다는 선물매도와 풋 옵션매입의 컴비네이션 헤지가 필요하며, 자산가격, 환율과 인플레이션의 동태적 관계에 따라 동태적 헤지전략이 필요하다. 실증적으로 추정한 동태적 최적 헤지는 이론적 결과를 장, 단기적으로 강하게 지지하고 있다.

핵심 주제어: 인플레이션 위험, 환위험, 비선형옵션
경제학문헌목록 주제분류: F30, G11

투고 일자: 2010. 4. 20. 심사 및 수정 일자: 2010. 7. 19. 게재 확정 일자: 2010. 8. 24.

* 이 연구는 2009년 경북대학교 A.S. 학술연구비에 의해 지원되었음. 연구의 발전과 수정에 많은 도움과 제언을 주신 익명의 세분 심사위원들께 감사드린다.

** 경북대학교 경제통상학부 교수, e-mail: kimhh@knu.ac.kr

Ⅰ. 서 론

국내외에서 포트폴리오 투자를 하는 투자자의 명목수익은 국내외 자산가격의 변동위험과 환위험에 노출되어 있다. 인플레이션 위험은 포트폴리오투자에서 물가변동이 명목적인 손실 보다는 실질투자손실을 가져올 가능성을 말한다. 물가변동이 큰 경우 명목수익이 증가하더라도 실질수익은 감소할 수 있다. 많은 아시아 국가에서 자산가격의 변동위험과 환위험은 선물시장에서 거래가 가능하지만 인플레이션 위험은 거래가 불가능하여 헤지 할 수 없는 경우가 많다. 따라서 투자자는 실질수익의 개념에서 인플레이션 위험에 그대로 노출되는데 이를 인지하지 못하는 경우가 자주 있고, 인지하더라도 헤지할 수 있는 수단이 없기 때문에 다른 금융 헤지 수단을 사용하여 인플레이션 위험을 간접적으로 헤지할 수 밖에 없다.

미국 시카고시장에서 인플레이션 위험에 대한 헤지 수단으로서 물가연동 채권(inflation-indexed treasury notes) 등이 거래되고 있으며, 최근 그 거래량이 전체 미국채권(treasury debts) 거래량의 5%에 달하고 있다.[1] 하지만 아직 인플레이션 위험에 대한 인식부족으로 아직 거래량이 활발하지 못한 편이며 인플레이션 위험에 대한 연구도 최근 들어서 진행되고 있으나 비교적 희소한 편이다. 인플레이션 위험에 대한 연구를 위해 Jarrow・Yildirim(2003), Beber・Brandt(2006) 등은 Lucas적 일반균형모형을 사용하여 인플레이션 위험에 대한 파생상품의 가격결정모형을 이론적으로 도출하고 있고, Giofre(2009)와 Gurkaynak・Wolfers(2006)는 인플레이션 위험에 대한 헤지 효과와 그 위험의 확률분포를 실증적으로 분석하고 있다. Patel・Zeckhauswer(1987)은 피셔방정식과 물가의 시계열적 특성을 사용하여 미국 재무성채권이 물가를 완전하게 헤지할 수 있는지 검증하였다. 하지만, 이들 연구는 채권가격과 물가가 서로 선형적인 관계에 있으며 그 변동성이 유사하다는 것을 보여주고 있다는 점에서 기존 피셔방정식과 효율성시장가설의 결합적인 검증과 다르지 않다. Lioui・Poncet(2005)는 물가의 불확실성과 증권가격이 서로 관계가 있는지 확인하고 있으며 인플레이션 파생상품의 가격결정에 대한 모형을 제시하고 있다.

본 연구는 기존연구와 다르게 인플레이션 위험이 존재하나 그 위험을 직접적으로

---

1) Chicago Mercantile Exchange(2008년) 자료참조.

헤지할 수 없으며, 대신 증권선물과 외환선물을 사용하여 간접적으로 헤지하는 경우 투자자의 예상효용을 극대화시키는 최적 헤지 전략을 이론적으로 살펴보고자 한다. 또한 이론적으로 도출한 최적 헤지 전략을 몇 가지 시뮬레이션을 통해 실증적으로 검증해 보고 증권가격, 환율과 인플레이션의 동태적 관계에 따라 투자자의 동태적 헤징전략이 어떻게 달라지는지 살펴보고자 한다. 이 연구에서 국내투자자는 국내외 포트폴리오 투자를 하는데 명목수익보다 실질수익의 극대화에 목적이 있다고 하자. 투자자는 인플레이션 위험, 증권가격의 변동위험과 환위험에 동시에 노출되어 있으며 인플레이션 위험을 거래하는 시장이 없으나 증권가격의 변동 위험과 환위험을 거래할 수 있는 선물시장은 존재한다고 가정한다.

인플레이션 위험을 완전하게 헤지할 수 있는 수단이 제약되어 있는 경우 국제포트폴리오 자본이동의 규모와 방향은 단순한 수익률차이보다는 이들 위험요인과 위험에 대한 헤지 가능성에 의해 영향을 받을 수 있다. 최근 Giofre(2009)와 Lane · Milesi-Ferretti(2008)는 인플레이션 위험이 정보 비대칭성의 효과와 같이 국제간 포트폴리오 투자에 유의적인 영향을 미치고 있다는 것을 보여주고 있다.[2] 기존연구에서 자산가격의 변동위험과 환위험을 거래하는 선물시장이 존재하고 그 선물가격이 불편타당하다면(unbiased), 최적 헤지는 완전 헤지(full-hedge)이다. 완전헤지이론(full hedge theorem)은 Holthausen(1979), Sandmo(1971). Rao(2000), Lence(1995) 등에 의해 연구되었으며 투자수익에서 자산가격 위험과 환위험은 단순히 선물매도(short futures)계약으로 완전하게 헤지가 가능하다는 것을 보여주고 있다. 완전헤지이론이 성립하기 위해 중요한 가정은 위험을 거래할 수 있는 선물시장의 존재와 선물가격의 불편타당성(unbiasedness)이다.[3]

하지만, 인플레이션 위험은 증권가격위험, 환위험 등에 서로 영향을 미치면서 투자자의 수익을 기간에 따라 서로 다르게 비선형적으로 변화시키기 때문에 가격변동

2) Chinn · Meredith(2005), Hau · Rey(2004), Forbes(2008), Lane · Miles-Ferreti(2001) 등은 최근 이자율평가가 성립하지 못하는데 이는 국제자본이동에서 수익률보다는 위험요인이 더욱 크게 작용하기 때문인 것으로 보인다. 환율과 수익률에 대한 최근 연구들은 Pavlova · Rigobon(2003), Wu(2000) 참조.

3) Anderson · Danthine(1981), Broll · Wahl · Zilcha(1995), Muller(1997, 2000), Liu · Geaun · Lei(2001) 등은 환위험을 거래 할 수 있는 선물시장이 존재하지 않을 때 간접헤지(cross hedge)가 환위험을 완전하게 제거하지 못하고 있다는 것을 보여주고 있다. 그 이유는 간접환율과 직접환율의 변동이 서로 괴리되기 때문이다.

위험을 거래하는 선물시장이 존재하고 선물가격이 불편타당하더라도 단순히 증권과 외환의 선물매도계약으로 투자수익의 위험을 완전하게 헤지 할 수 없다. 따라서 인플레이션 위험으로 인해 기간별로 다르게 나타나는 비선형적인 수익위험을 제거하기 위해 비선형적인 손익스케줄을 가진 옵션 헤지가 추가적으로 필요하다.[4] 또한, 물가와 환율, 자산가격간의 상관관계가 시간에 따라 다르게 변화하는 동태적 반응을 보일 때 투자수익위험에 대한 동태적 헤징 전략이 필요하다.

제Ⅱ장은 거래가 불가능한 인플레이션 위험이 존재하는 경우 투자자의 수익모형을 이론적으로 도출해 본다. 제Ⅲ장은 자산가격 위험과 환 위험, 그리고 인플레이션 위험이 서로 상관관계를 가지며, 그 관계가 장기와 단기에 서로 다르게 변화할 때 수익위험에 대한 최적 헤지와 동태적 헤지를 이론적으로 살펴본다. 제Ⅳ장은 투자자가 인플레이션 위험을 고려하는 경우 이론적으로 도출된 최적 헤지를 실증적으로 검증해본다. 또한 단기와 장기적으로 동태적인 과정에서 최적 헤지 전략을 실증적으로 살펴본다. 요약과 연구의 의미는 마지막 장에서 제시된다.

Ⅱ. 인플레이션 위험과 실질수익모형

여기에서는 거래가 불가능한 인플레이션 위험이 존재하는 경우 투자자의 수익모형을 이론적으로 살펴본다. 이 연구는 인플레이션 위험이 존재할 때 실질수익모형을 이론적으로 살펴보고 있다는 점에서 Muller(2000)와 유사하나, Muller모형과 다르게 자산가격, 환율, 그리고 인플레이션의 관계가 동태적인 과정을 보이게 되는 경우를 고려하여 동태적 최적 헤지 전략을 살펴보고 있다.

국내 투자자는 명목수익 보다는 인플레이션 위험을 고려하여 실질수익을 극대화하려고 한다. 국제 포트폴리오 투자에는 거래비용과 규제가 존재하지 않으며 국내외 증권이 서로 완전 대체적이라고 가정한다.[5] 이때 국제 포트폴리오자산은 증권자산으로 한정한다. 위험을 기피하는 국내 투자자의 명목수익은 국내외 증권투자로

---

4) 수익이 환율과 가격위험에 대해 비선형적인 관계를 보이는 또 다른 이유는 선물환율이 편기되거나, 선물시장이 존재하지 않아서 간접 헤지를 하는 경우이다.

5) 자본시장의 규모가 클수록, 자본시장의 통합이 진전될수록, 경제규모가 클수록 자산수요가 증가하며 거래비용이 낮아지면서 국내외 자산간 대체성이 증가한다. Portes · Rey(2005), Martin · Rey(2004) 참조.

인한 수익으로 부터 발생하며 증권가격 변동위험에 노출되어 있다. 또한 해외통화로 표시된 해외증권의 투자수익은 해외 증권가격 위험과 더불어 환위험에 노출되어 있다. 국내외 증권가격 변동위험과 환위험은 선물시장에서 거래할 수 있으나, 인플레이션 위험은 거래할 수 없다고 가정한다. 국내투자자의 현재(0기)와 미래(1기)의 자산 가치(Π_i)는 각각 $\Pi_0 = r_0\,q + s_0\,r_0^*\,q^*$, $\Pi_1 = r_1\,q + s_1\,r_1^*\,q^*$이다. 이때 r_i와 r_i^*는 i기의 국내와 해외 증권가격이며 q와 q^*는 투자자가 보유하고 있는 국내와 해외 증권자산의 규모이다. $(i=0,\ 1)$. s_i는 i기에 외국통화 단위당 국내통화의 환율이며 환율상승은 국내통화가치의 하락을 나타낸다. 국내와 해외에 투자한 증권규모(q와 q^*)가 일정할 때 국내투자자의 명목 투자수익은 미래와 현재의 자산 가치 변동과 같으며 $\widetilde{\Pi} = \Pi_1 - \Pi_0$이다. 즉,

$$\widetilde{\Pi} = \tilde{r}\,q + \tilde{s}\,\widetilde{r^*}\,q^* \tag{1}$$

여기에서 $\widetilde{\Pi}$는 명목수익, $\tilde{r}$과 $\widetilde{r^*}$은 국내와 해외 증권가격 변동, $\tilde{s}$는 환율변동을 나타낸다. 미래 증권가격과 환율은 불확정적인 변수(stochastic variable)이며 변수위에 "~"는 그 변수가 불확정적이라는 것을 나타낸다. 논리의 단순성을 위해 해외증권가격 변동($\widetilde{r^*}$)을 1로 정상화(normalize)한다면, 국내 증권가격 변동($\tilde{r}$)은 외국가격에 대한 상대가격변동(또는 상대수익률)의 개념이 된다. 실질수익은 명목수익에 물가요인을 곱한 값과 같다.

$$\tilde{\pi} = \tilde{\phi}\,\widetilde{\Pi} = \tilde{\phi}\,(\tilde{r}\,q + \tilde{s}\,q^*) \tag{2}$$

여기에서 $\tilde{\phi}$는 물가요인(inflation factor)으로서 물가의 역함수이며 $\tilde{\pi}$는 물가를 고려한 실질수익이다. 한편, 물가요인($\tilde{\phi}$)은 증권가격과 환율변동에 대한 일정한 상관관계를 보인다. 예를 들어, 증권가격 또는 수익률이 증가하면 자본이 국내로 유입되면서 통화량이 증가하며, 물가가 상승하는 압력을 받게 된다. 따라서 물가요인(물가의 역수)은 하락하게 된다. 한편, 환율상승은 장기적으로 경상수지의 개선을 통해 자본유입과 통화팽창을 가져와 물가를 상승시킨다. 이 경우 물가의 역수인 물가요인은 하락하는 경향을 보인다. 즉,

$$\tilde{\phi} = g(\tilde{r}) + h(\tilde{s}) + \tilde{\epsilon} \tag{3}$$

여기에서 $g(\tilde{r})$와 $h(\tilde{s})$는 증권가격과 환율변동이 물가요인에 미치는 함수적 관계이며 $\tilde{\epsilon}$는 증권가격과 환율변동과 독립적인 백색잡음이라고 가정한다. 증권가격변동은 $\tilde{r}=E(\tilde{r})+\tilde{n}$이며 환율변동은 $\tilde{s}=E(\tilde{s})+\tilde{e}$이라고 가정한다. $E(\tilde{r})$와 $E(\tilde{s})$는 증권가격과 환율변동의 기댓값이며, $E(\cdot)$는 예상부호이다. $\tilde{n}, \tilde{e}$는 각각 증권 가격과 환율의 예측오차이며 서로 독립적이다. 즉, $E(\tilde{n})=0$, $E(\tilde{e})=0$, $Cov(\tilde{n}, \tilde{e})=0$ 이다. 식 (3)에서 증권가격변동에 대한 물가변화는 $\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{r}} = g'(\tilde{r})$이며, 환율변동에 대한 물가변화는 $\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{s}} = h'(\tilde{s})$이다. 여기에서는 인플레이션 위험을 중점적으로 분석하고 논리전개의 편의를 위해 먼저 증권가격과 환율은 서로 독립적이라고 가정하여 실질수익의 변동을 살펴본다. 그 다음 이 가정을 완화시켜서 증권가격과 환율이 서로 영향을 미칠 때 실질수익의 변동을 살펴본다.

1. 증권가격과 환율변동이 서로 독립적일 때

먼저 두 변수가 서로 독립적이라면 식 (2)과 (3)를 이용하여 증권가격과 환율이 변동할 때 실질수익의 변화를 살펴볼 수 있다.

$$\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial\tilde{r}} = \tilde{\phi}q + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{r}}(\tilde{r}q + \tilde{s}q^*) = \tilde{\phi}q(1 + \frac{\tilde{\eta}}{\delta_r}) = \widetilde{\phi_r}q \tag{4}$$

$$\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial\tilde{s}} = \tilde{\phi}q^* + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{s}}(\tilde{r}q + \tilde{s}q^*) = \tilde{\phi}q^*(1 + \frac{\tilde{\xi}}{\delta_s}) = \widetilde{\phi_s}q^* \tag{5}$$

여기에서 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$는 증권가격과 환율이 변화할 때 인플레이션 위험을 고려한 실질수익곡선의 기울기를 각각 나타내며, 증권가격과 환율이 수익에 미치는 효과에서 인플레이션 위험의 가중치를 더해준 값이다. 즉, $\widetilde{\phi_r} = \tilde{\phi}(1 + \frac{\tilde{\eta}}{\delta_r})$, $\widetilde{\phi_s} = \tilde{\phi}(1 + \frac{\tilde{\epsilon}}{\delta_s})$이다. 이때 $\tilde{\eta} = g'(\tilde{r})\frac{\tilde{r}}{\tilde{\phi}}$는 증권가격변동에 대한 물가요인의 탄력성, $\tilde{\xi} = h'(\tilde{s})\frac{\tilde{s}}{\tilde{\phi}}$는 환율변동에 대한 물가요인의 탄력성이다. δ_r는 전체수익에서 국내증권수익이 차

지하는 비중($\delta_r = \frac{\tilde{r}\,q}{\Pi}$)이며, δ_s는 해외증권수익이 차지하는 비중($\delta_s = \frac{\tilde{s}q^*}{\Pi}$)이다.

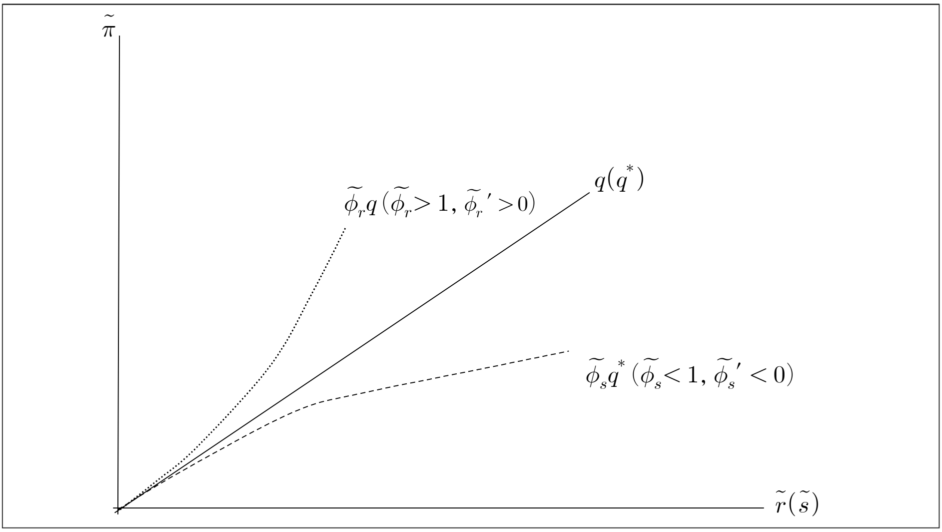
식 (4)과 (5)를 이용하면 인플레이션 위험이 존재할 때 증권가격 또는 환율 변동에 따라 실질수익이 어떻게 변화하는지를 살펴볼 수 있다. 인플레이션 위험을 고려하지 않을 때 증권가격과 환율변동에 대해 명목수익곡선의 기울기($\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\tilde{r}}$, $\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\tilde{s}}$)는 단순히 q와 q^*이다. 그러나 인플레이션 위험을 고려할 때 증권가격과 환율변동에 대한 실질수익곡선의 기울기는 $\widetilde{\phi_r}\,q$와 $\widetilde{\phi_s}\,q^*$이며, 물가수준($\tilde{\phi}$), 증권가격과 환율에 대한 물가요인의 탄력성($\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$)에 따라 다르게 결정된다.

〈그림 1〉은 증권가격(또는 환율)이 변화할 때 실질수익의 변화($\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial\tilde{r}}$ ($\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial\tilde{s}}$))를 보여주고 있으며 X축은 증권가격(또는 환율), Y축은 실질수익이다. 주어진 증권자산에서 증권가격(또는 환율) 변동에 대한 실질수익곡선의 기울기는 $\widetilde{\phi_r}$ (또는 $\widetilde{\phi_s}$)의 크기에 따라 다르다. 그림에서 실선 q(q^*)는 인플레이션 위험을 고려하지 않을 때 증권가격(환율)변동에 대한 명목수익곡선을 나타내며, 점선 $\widetilde{\phi_r}q$와 $\widetilde{\phi_s}q^*$은 인플레이션 위험을 고려할 때 증권가격(환율) 변동에 대한 실질수익곡선을 나타낸다. 두 선분을 비교할 때 명목수익곡선은 단순히 증권가격과 환율변동에 선형적으로 변화하게 되나, 실질수익곡선은 인플레이션 위험을 고려하여 증권가격과 환율에 대해 비선형적으로 변화하게 된다. $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$가 1보다 작은 경우 인플레이션 위험은 실질수익을 명목수익에 비해 감소시키나, 1 보다 큰 경우 위험에 노출된 실질수익을 증가시키는 역할을 하게 된다. 〈그림 1〉은 $\widetilde{\phi_r} > 1$, $\widetilde{\phi_r}' > 0$의 경우와 $0 < \widetilde{\phi_s} < 1$, $\widetilde{\phi_s}' < 0$ 인 경우 증권가격과 환율변동에 대한 실질수익의 변화를 각각 보여주고 있다. 여기에서 $\widetilde{\phi_r}'$와 $\widetilde{\phi_s}'$는 증권가격과 환율변동에 대한 실질수익곡선의 기울기 변화를 나타낸다.6)

---

6) 여기에서 $\widetilde{\phi_r}' = 2g'(\tilde{r}) + \frac{\tilde{r}g''(\tilde{r})}{\delta_r}$, $\widetilde{\phi_s}' = 2h'(\tilde{s}) + \frac{\tilde{s}h''(\tilde{s})}{\delta_s}$이며, $g''(\tilde{r}) = \frac{\partial^2 g(\tilde{r})}{\partial\tilde{r}^2}$, $h''(\tilde{s}) = \frac{\partial^2 h(\tilde{s})}{\partial\tilde{s}^2}$이다. 증권가격과 환율의 변동에 대한 수익곡선의 기울기 변화는 $g'(\tilde{r})$와 $g''(\tilde{r})$ 또는 $h'(\tilde{s})$와 $h''(\tilde{s})$의 상대적 크기에 따라 결정된다.

〈그림 1〉 증권가격(환율)의 변동에 대한 실질수익곡선의 변화



$\widetilde{\phi_r} > 1$, $\widetilde{\phi_r}' > 0$ 인 경우 증권가격이 변화할 때 실질수익곡선은 명목수익곡선보다 가파르게 상승하나, 반면 $0 < \widetilde{\phi}_s < 1$, $\widetilde{\phi}_s{}' < 0$ 일 때 환율변동에 대한 실질수익곡선은 명목수익곡선보다 완만한 변화를 보여주고 있다. 그림에서 $\widetilde{\phi}_r > 1$, $\widetilde{\phi}_r{}' < 0$ 인 경우 증권가격변동에 대해 실질수익의 위험노출 정도는 명목수익보다 비선형적으로 높아지게 된다. 이는 인플레이션 위험이 증권가격의 변동위험으로 인한 실질수익의 불확실성을 오히려 증폭시켜서 금융 헤지의 필요성을 증가시키고 있다는 것을 의미한다. 한편, $\tilde{\tilde{\phi}}_s < 1$, $\tilde{\tilde{\phi}}_s{}' < 0$ 인 경우 환율변동에 대해 실질수익의 위험노출정도는 오히려 감소할 수 있다. 이 경우 인플레이션 위험이 환율변동위험으로 인한 실질수익의 불확실성을 감소시켜서 금융 헤지의 필요성을 줄이고 있다.

증권가격의 변동위험과 환위험에 대한 선형적 수익곡선은 완전한 헤지(full hedge)가 성립하기 위한 필요조건이다(Broll et al, 2001 참조). 인플레이션 위험을 고려한 실질수익곡선은 증권가격과 환율 변동에 대해 비선형적으로 변화하는데 이러한 실질수익곡선의 비선형적인 위험을 헤지하기 위해서는 선물매도와 더불어 비선형적인 손익스케줄을 가진 옵션 헤지도 같이 사용하는 컴비네이션(combination) 헤지 전략이 필요하다. 보다 자세한 최적 헤지 전략에 대한 논의는 다음 장에 나타나 있다.

2. 증권가격과 환율변동이 서로 영향을 미칠 때

증권가격과 환율이 서로 영향을 미치며, 그 효과의 크기를 일정한 상수 d_{sr}이라고 하자. 또한 두 변수 간 인과방향에 관계없이 d_{sr}의 크기는 같다고 가정한다. 이 경우 $\frac{\partial\tilde{r}}{\partial\tilde{s}}=\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{r}}=d_{sr}$이며, $d_{sr}\neq 0$이다. 증권가격과 환율이 서로 영향을 미칠 때 식 (3)으로부터 증권가격에 대한 물가변화는 $\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{r}}=g'(\tilde{r})+h'(\tilde{s})d_{rs}$이며, 환율에 대한 물가변화는 $\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{s}}=h'(\tilde{s})+g'(\tilde{r})d_{rs}$이다. 이를 이용하면 증권가격과 환율이 서로 영향을 미칠 때 실질수익의 변화를 다시 구할 수 있다.

$$\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial\tilde{r}}=\tilde{\phi}q+g'(\tilde{r})\tilde{\Pi}+(\tilde{\phi}q^{*}d_{rs}+h'(\tilde{s})\tilde{\Pi}d_{rs})$$

$$=\tilde{\phi}q(1+\frac{\tilde{\eta}}{\delta_r})+\tilde{\phi}q^{*}(1+\frac{\tilde{\xi}}{\delta_s})d_{rs}=\widetilde{\phi_r}q+\widetilde{\phi_s}q^{*}d_{rs} \tag{4'}$$

$$\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial\tilde{s}}=\tilde{\phi}q^{*}+h'(\tilde{s})\tilde{\Pi}+(\tilde{\phi}qd_{rs}+g'(\tilde{r})\tilde{\Pi}d_{rs})$$

$$=\tilde{\phi}q^{*}(1+\frac{\tilde{\xi}}{\delta_s})+\tilde{\phi}q(1+\frac{\tilde{\eta}}{\delta_r})d_{rs}=\widetilde{\phi_s}q^{*}+\widetilde{\phi_r}qd_{rs} \tag{5'}$$

앞에서와 마찬가지로 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$는 증권가격과 환율의 변동이 직접적으로 실질수익에 미치는 효과이다. $\tilde{\eta}=g'(\tilde{r})\frac{\tilde{r}}{\tilde{\phi}}$과 $\tilde{\xi}=h'(\tilde{s})\frac{\tilde{s}}{\tilde{\phi}}$는 각각 증권가격과 환율 변동에 대한 물가요인의 탄력성이며, δ_r와 δ_s는 국내증권과 해외증권이 전체수익에서 차지하는 비중이다. 식 (4)와 (5)를 식 (4)'와 (5)'와 서로 비교해보면 증권가격 변동이 실질수익에 미치는 효과는 가격변화가 직접적으로 수익에 미치는 효과와 환율을 통해 간접적으로 수익에 미치는 효과로 구분된다. 이 경우 증권가격과 환율이 독립적일 때 보다 실질수익이 더욱 크게 변동할 수 있다. 식 (4)'와 (5)'의 우변에서 첫째 항은 증권가격과 환율변동이 실질수익에 미치는 직접적인 효과이며, 우변 둘째 항은 두 변수가 서로의 인과관계를 통해 실질수익에 미치는 간접적인 효과이다.

식 (4)'와 (5)'에서 실질수익곡선의 기울기는 물가요인의 가격탄력성과 환율탄력성 ($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)과 증권가격과 환율의 상관관계 (d_{sr})에 따라 결정된다. 여기에서 유추

할 수 있는 경제학적인 의미는 투자수익의 위험이 단순히 증권가격과 환율변동위험 뿐 아니라 이들 변수가 물가에 미치는 효과 ($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)에 따라 다르게 결정된다는 것이다. 또한 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 크기와 부호가 시간에 따라 서로 다르게 나타나는데 이는 시간에 따라 증권가격과 환율이 물가요인에 서로 다르게 영향을 미치기 때문이다.[7] 예를 들어, 증권가격(또는 수익률)이 증가하면 국내로 자본이 유입되면서 통화량이 증가하며, 물가가 상승하는 경향을 보이게 된다. 증권가격과 물가의 역수인 물가요인과의 관계($\tilde{\eta}$)는 음(-)의 부호를 가지게 된다. 자본이동에 대한 규제가 없고 자본이동이 무한탄력적인 경우 $\tilde{\eta}$는 기간에 관계없이 모두 음(-)의 부호를 보일 것이다. 장기적으로 증권가격에 대한 자본이동의 탄력성이 커지면서 증권가격변동에 따르는 물가상승 압력이 커지고 그 결과 $\tilde{\eta}$의 절대값이 단기보다 장기에 커지는 경향을 보일 것이다. 한편, 환율상승은 단기적으로 재화시장의 가격탄력성이 낮아서 마샬-러너(Marshall-Lerner) 조건이 충족되지 못하면 경상수지가 악화되나 장기적으로 수지가 개선되는 J-곡선 효과를 가진다. 경상수지의 개선은 자본유입과 통화팽창을 가져와 물가를 상승시키며, 물가의 역수인 물가요인은 하락하는 경향을 보인다. 따라서 환율과 물가요인의 관계($\tilde{\xi}$)는 단기적으로 양(+)의 관계이나, 장기적으로 음(-)의 관계로 전환되는 동태적인 행태를 보이게 된다. $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 부호와 크기가 기간에 따라 동태적으로 변화할 때 실질수익곡선의 기울기는 기간에 따라 다르게 결정될 것이다.[8] 다음 장에서는 물가를 고려한 실질수익을 극대화시키는 최적 헤지를 이론적으로 살펴보고자 한다.

Ⅲ. 인플레이션 위험에 대한 최적 헤지

여기에서는 국내외 포트폴리오 투자수익이 증권가격의 변동위험과 환위험 뿐 아니라 인플레이션 위험에 노출되어 있을 때 국내투자자의 예상효용을 극대화시키는 최적 헤지 전략을 알아보고자 한다. 앞에서 살펴보았듯이 인플레이션 위험을 고려한다면 증권가격과 환율의 변동에 대해 실질수익은 기간별로 서로 다른 비선형적인 변화 형태를 보이게 된다. 이러한 실질수익의 위험을 커버하기 위한 최적 헤지는

---

7) Broll · Eckwert(2001)는 동태적 헤징전략을 의사결정기간으로 구분하여 분석하고 있다.
8) 환율과 물가의 장 · 단기적 관계를 추정한 연구는 Edward(1983) 참조.

단순히 선형적인 선물매도 헤지보다는 기간별로 선물매도와 더불어 옵션을 동시에 사용하는 헤지 전략이 필요할 것으로 예상된다. 여기에서 증권가격과 환율에 대한 실질수익의 위험을 커버하기 위해 먼저 단순한 선물매도계약을 이용한 최적 헤지와 선물매도계약과 옵션을 동시에 사용하는 컴비네이션 헤지를 차례대로 살펴보기로 한다.

1. 최적 선물 헤지

투자자는 증권가격위험과 환위험을 커버하기 위해 증권과 외환의 선물을 매도하는 계약을 한다고 하자. 풋(put) 옵션을 이용한 컴비네이션(combination) 헤지는 나중에 다시 언급하기로 한다. 이 경우 실질수익은 식 (2)에서 선물매도계약으로 인한 선물정산(settlement) 손익을 더해준 값과 같다.

$$\tilde{\pi} = \tilde{\phi}\,\tilde{\Pi} = \tilde{\phi}\,(\tilde{r}\,q + \tilde{s}\,q^{*} + F(f - \tilde{r}) + F_s(f_s - \tilde{s})) \tag{6}$$

앞에서와 같이 $\tilde{\Pi}$는 명목수익, $\tilde{\pi}$는 물가를 고려한 실질수익이다. $\tilde{r}$과 $\tilde{s}$은 국내 증권가격과 환율이며, q와 q^{*}는 국내와 외국 증권규모이다. $\tilde{\phi}$는 물가요인(inflation factor)으로서 물가의 역수이다.

F, F_s는 증권과 외환의 선물매도계약(수)이며, f와 f_s는 각각 증권의 선물가격과 선물환율이다. 여기에서 선물가격과 선물환율(f, f_s)은 선물계약에서 거래 당사자 간에 미리 확정되는 변수이다. 국내외 증권에 투자한 투자자는 증권가격과 환율이 하락하는 경우 손실을 보게 된다. 따라서 미리 정해진 선물가격(환율)으로 선물매도 계약을 맺음으로서 미래 증권가격(환율)이 하락하는 경우에 보유하고 있는 증권가치의 하락을 선물매도계약의 이익으로 커버함으로서 증권가격(환율)의 변동위험을 헤지할 수 있다. 이때 선물계약에는 거래비용이나 증거금(margin) 등 금융비용이 발생하지 않는다고 가정한다.

국내 투자자는 증권가격과 환율의 불확실성으로 인해 불확실한 실질수익을 가지고 식 (7)의 예상효용을 극대화시킨다. 이때 선택변수는 증권과 외환에 대한 선물매도계약(수)이다. 효용함수(u)는 실질수익에 대해 체감하는 원점에서 볼록한 곡선(strictly concave)이며 $u' > 0$, $u'' < 0$이라고 가정한다. 또한 투자자의 효용함수

에서 절대위험기피의 정도(a degree of absolute risk aversion)가 적어도 증가함수가 아니며 (non-increasing), $u''' > 0$ 이라고 가정한다.[9]

$$Max_{F,\, F_s} E[U(\tilde{\pi})] \tag{7}$$

예상효용을 극대화시키는 최적 선물매도계약(수)을 결정하기위한 일차조건식은 다음과 같다.[10]

$$E[\,U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}(f - \tilde{r})] = 0 \tag{8}$$
$$E[\,U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}(f_s - \tilde{s})] = 0 \tag{9}$$

만약 선물가격과 선물환율이 모두 불편타당하다면, $f = E(\tilde{r})$ $f_s = E(\tilde{s})$이다. 이 조건과 공분산의 정의를 사용하여 식 (8)과 (9)를 다시 정리하면 일차조건식을 만족시키는 최적 선물매도계약을 구할 수 있다.

$$E(\,U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})E(f - \tilde{r}) - Cov(\tilde{r}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}) = 0 \tag{10}$$
$$E(\,U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})E(f_s - \tilde{s}) - Cov(\tilde{s}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}) = 0 \tag{11}$$

선물가격과 선물환율은 모두 불편타당하다면 $f = E(\tilde{r})$, $f_s = E(\tilde{s})$이므로 식 (10)과 (11)에서 $Cov(\tilde{r}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}) = 0$, $Cov(\tilde{s}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}) = 0$이다. 여기에서 일차조건식 (10)과 (11)를 만족시키는 최적 선물매도계약(수)은 물가요인의 증권가격과 환율에 대한 탄력성($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)에 따라 결정된다. 선물을 이용한 헤지거래에서 선물매도계약(수)이 실제 보유증권(수)보다 많은 경우 초과 헤지(over-hedge), 선물매도계약(수)가 실제 보유증권(수)보다 적은 경우 과소 헤지(under-hedge), 선물매도계약(수)가 실제 보유증권(수)과 일치하는 경우 완전 헤지(full-hedge)라고 정의한다.

---

9) 절대위험기피의 정도(degree of absolute risk aversion)와 예상효용함수의 관계에 대해 Sandmo(1971) 참조.

10) 효용함수가 이윤에 대해 원점에서 볼록하고 (strictly concave, 또는 $u'' < 0$) $u''' > 0$이면 이윤극대화를 위한 2차 조건은 만족된다.

일차조건식을 요약하면 다음과 같은 〈정리 1〉을 얻을 수 있다.

정리 1: 선물가격과 선물환율이 불편타당하고, 물가의 증권가격과 환율에 대한 탄력성($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)이 모두 제로(0)일 때 최적 헤지는 완전 헤지이다. 그러나 그 탄력성이 양(+)의 부호를 가지면 최적 헤지는 과소 헤지이며, 반대로 탄력성이 음(-)의 부호를 가지면 탄력성의 절대값에 따라 최적 헤지는 과소 또는 초과 헤지가 될 수 있다.

증명:

1) $\tilde{\eta} \neq 0$, $\tilde{\xi} \neq 0$, $d_{rs} = 0$ 일 때;

증권가격과 환율이 불편타당하다면 $f = E(\tilde{r}), f_s = E(\tilde{s})$이며, 증권가격과 환율이 서로 독립적이라면 d_{rs}=0 이다. 이 조건과 식 (10과 (11)에서 $Cov(\tilde{r}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}) = 0$, $Cov(\tilde{s}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}) = 0$이다. 여기에서 두 변수 간 공분산은 비선형적이며 복잡하여 경제적 의미를 구할 수 없어서 대신에 두 변수의 공분산을 선형화시키기 위해 두 변수의 일차차분을 사용하였다. 즉, $\frac{\partial(U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial(U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})}{\partial s} = 0$ 이다. 두 변수의 일차차분을 사용하여 공분산을 선형화시키는 방법은 파생상품이론에서 가끔 사용하고 있는데, 두 변수의 분산이 일정하고 크지 않다면 두 변수의 공분산과 일차차분의 부호와 크기가 유사하다(Muller(1997, 2000) 참조). 이를 이용하면,

$$U''(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,\tilde{\phi_r}\,(q - F) + U'(\tilde{\pi})g'(\tilde{r}) = 0 \tag{12}$$

$$U''(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,\tilde{\phi_s}\,(q^* - F_s) + U'(\tilde{\pi})h'(\tilde{s}) = 0 \tag{13}$$

식 (12)과 (13)를 다시 정리하면

$$U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,[-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\tilde{\phi_r}\,(F - q) + \frac{g'(\tilde{r})}{\tilde{\phi}}] = 0 \tag{14}$$

$$U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,[-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\tilde{\phi_s}\,(F_s - q^*) + \frac{h'(\tilde{s})}{\tilde{\phi}}] = 0 \tag{15}$$

$-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}=\alpha$ 이며 투자자의 고정절대위험기피정도(degree of constant absolute risk aversion; CARA)를 나타낸다. CARA의 정의와 식 (14)과 (15)를 이용하면 투자자의 예상효용을 극대화시키는 최적 헤지를 구할 수 있다.

$$F=q-\frac{\tilde{\eta}}{\alpha\widetilde{\phi_r}\,\tilde{r}} \tag{16}$$

$$F_s=q^*-\frac{\tilde{\xi}}{\alpha\widetilde{\phi_s}\tilde{s}} \tag{17}$$

여기에서 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$는 선물 헤지가 있을 때 증권가격과 환율 변동에 대한 실질수익곡선의 기울기를 각각 나타내며, 증권가격과 환율이 수익에 미치는 효과에서 인플레이션 위험의 가중치를 더해준 값이다.[11] 식 (16)과 (17)에서 최적 헤지는 물가요인의 가격과 환율에 대한 탄력성($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)에 따라 결정되며 ($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)와 ($\widetilde{\phi_r}$, $\widetilde{\phi_s}$)을 제외한 다른 변수는 모두 양의 부호를 가진다. 만약, $\tilde{\eta}>0$, $\tilde{\xi}>0$ 이면 최적 헤지(F, F_s)는 과소 헤지이나, $\tilde{\eta}<0$, $\tilde{\xi}<0$ 이면 최적 헤지(F, F_s)는 탄력성의 절대적 크기에 따라 과소 또는 초과 헤지가 된다. 이는 $\tilde{\eta}<0$, $\tilde{\xi}<0$인 경우 그 탄력성의 절대값이 국내외 증권의 수익비중(δ_r, δ_s)보다 크게 된다면 식 (16)과 (17)의 우변 둘째 항에서 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$가 양(+)에서 음(-)으로 부호가 전환되기 때문이다. 즉, $\widetilde{\phi_r}=\tilde{\phi}(1+\frac{\tilde{\eta}}{\delta_r})$, $\widetilde{\phi_s}=\tilde{\phi}(1+\frac{\tilde{\epsilon}}{\delta_s})$이므로 $|\tilde{\eta}|>\delta_r$, $|\tilde{\xi}|>\delta_s$ 이라면 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$는 음(-)의 부호를 가지게 된다. 따라서 $\tilde{\eta}<0$, $\tilde{\xi}<0$인 경우 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 절대값이 국내외 증권의 수익비중(δ_r, δ_s)보다 작으면 초과 헤지, 그 절대값이 증가하여 국내외 증권의 수익비중보다 크다면 과소 헤지가 최적 헤지이다.

---

11) 이때 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$는 선물 헤지가 없을 때와 있을 때 그 크기가 서로 다르다. 즉, 선물 헤지가 있을 때 $\widetilde{\phi_r}=\tilde{\phi}(1+\frac{\tilde{\eta}}{\delta'_r})$, $\widetilde{\phi_s}=\tilde{\phi}(1+\frac{\tilde{\epsilon}}{\delta'_s})$이다. 이때 δ'_r는 전체수익에서 국내증권과 그 선물 헤지의 수익이 차지하는 비중($\delta'_r=\frac{\tilde{r}(q-F)}{\Pi}$)이며, δ'_s는 해외증권과 그 선물 헤지의 수익이 차지하는 비중($\delta'_s=\frac{\tilde{s}(q^*-F_s)}{\Pi}$)이다.

2) $\tilde{\eta}=0$, $\tilde{\xi}=0$, $d_{rs}=0$ 일 때;

선물가격과 선물환율이 불편타당하고($f=E(\tilde{r})$ $f_s=E(\tilde{s})$), 증권가격과 환율이 서로 독립적이며 ($d_{rs}=0$), $\tilde{\eta}=\tilde{\xi}=0$ 일 때 식 (16)과 (17)에서 투자자의 예상효용을 극대화시키는 최적 헤지는 국내증권과 외국증권자산 모두 $F=q$, $F_s=q^*$ 이며, 완전 헤지(full hedge)이다.

3) $\tilde{\eta}\neq 0$, $\tilde{\xi}\neq 0$, $d_{rs}\neq 0$ 일 때;

증권가격과 환율이 불편타당하고($f=E(\tilde{r}), f_s=E(\tilde{s})$), 증권가격과 환율이 서로 영향을 미친다면 $d_{rs}\neq 0$이다. 이 조건과 식 (10)과 (11)에서 $Cov(\tilde{r},U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})=0$, $Cov(\tilde{s},U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})=0$이다. 이를 이용하면,

$$U''(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,[\widetilde{\phi_r}\,(q-F)+\widetilde{\phi_s}\,(q^*-F_s)d_{rs}]+U'(\tilde{\pi})[g'(\tilde{r})+h'(\tilde{s})d_{rs}]=0 \quad (12)'$$

$$U''(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,[\widetilde{\phi_s}\,(q^*-F_s)+\widetilde{\phi_r}\,(q-F)d_{rs}]+U'(\tilde{\pi})[h'(\tilde{s})+g'(\tilde{r})d_{rs}]=0 \quad (13)'$$

식 (12)'과 (13)'를 다시 정리하면,

$$U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,[-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\widetilde{\phi_r}\,(F-q)+\frac{g'(\tilde{r})}{\tilde{\phi}}-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\widetilde{\phi_s}\,(F_s-q^*)d_{rs}$$
$$+\frac{h'(\tilde{s})}{\tilde{\phi}}d_{rs}]=0 \quad (14)'$$

$$U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,[-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\widetilde{\phi_s}\,(F_s-q^*)+\frac{h'(\tilde{s})}{\tilde{\phi}}-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\widetilde{\phi_r}\,(F-q)d_{rs}$$
$$+\frac{g'(\tilde{r})}{\tilde{\phi}}d_{rs}]=0 \quad (15)'$$

$-\dfrac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}=\alpha$ 이며 투자자의 절대위험기피정도이다. 식 (14)'과 (15)'를 이용하면 예상효용을 극대화시키는 최적 헤지를 구할 수 있다.

$$F = q - \frac{\tilde{\eta}}{\alpha \widetilde{\phi_r}\, \tilde{r}} - \Delta_{rs} \tag{16'}$$

$$F_s = q^* - \frac{\tilde{\xi}}{\alpha \widetilde{\phi_s} \tilde{s}} - \Delta_{sr} \tag{17'}$$

여기에서 Δ_{rs}와 Δ_{sr}는 증권가격(환율)이 환율(증권가격)의 변동을 통해 실질소득에 미치는 간접적인 효과를 커버하기 위해 추가적으로 필요한 최적 헤지 부분이다. 이때 $\Delta_{rs} = [\frac{\widetilde{\phi_s}}{\widetilde{\phi_r}}(F_s - q^*) + \frac{\tilde{\xi}}{\alpha \widetilde{\phi_r}\, \tilde{s}}]d_{rs}$, $\Delta_{sr} = [\frac{\widetilde{\phi_r}}{\widetilde{\phi_s}}(F - q) + \frac{\tilde{\eta}}{\alpha \widetilde{\phi_s}\, \tilde{r}}]d_{rs}$ 이며 Δ_{rs}와 Δ_{sr}의 크기와 부호는 $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$와 헤지규모$(F_s - q^*)$, $(F-q)$에 따라 결정된다.

식 (16)'과 (17)'에서 최적 헤지는 물가요인의 가격과 환율에 대한 탄력성($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)과 Δ_{rs}와 Δ_{sr}에 따라 결정된다. Δ_{rs}와 Δ_{sr}이 충분히 작은 경우 $\tilde{\eta} > 0$, $\tilde{\xi} > 0$이면 최적 헤지(F, F_s)는 과소 헤지이나, $\tilde{\eta} < 0$, $\tilde{\xi} < 0$이면 최적 헤지(F, F_s)는 그 탄력성의 절대적 크기에 따라 과소 또는 초과 헤지가 된다. 이는 $\tilde{\eta} < 0$, $\tilde{\xi} < 0$인 경우 그 탄력성의 절대값이 국내외 증권의 수익비중(δ_r, δ_s)보다 크게 된다면 식 (16)'과 (17)'의 우변 둘째 항에서 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$가 양(+)에서 음(-)으로 부호가 전환되기 때문이다. 따라서 $\tilde{\eta} < 0$, $\tilde{\xi} < 0$인 경우 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 절대값이 국내외 증권의 수익비중(δ_r, δ_s)보다 작으면 초과 헤지, 그 절대값이 증가하여 국내외 증권의 수익비중보다 크다면 과소 헤지가 최적 헤지이다.

〈정리 1〉은 국내외 증권에 투자하는 국내 투자자가 불확실한 실질수익을 가지고 예상효용을 극대화시키는 최적 헤지 규모를 설명하고 있다. 실질수익은 증권가격과 환율의 변동위험에 노출되어 있을 뿐 아니라 인플레이션 위험에 노출되어 있으며, 실질수익위험을 커버하는 최적 헤지는 증권가격, 환율, 물가의 상관관계($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)에 따라 결정된다. 증권가격(환율)에 대한 물가요인의 탄력성이 양(+)의 부호이면, 인플레이션 위험이 오히려 실질수익의 위험을 감소시켜서 금융 헤지의 필요성을 줄여주는 역할을 하면서 최적 헤지 전략은 과소 헤지이다. 하지만 증권가격(환율)에 대한 물가요인의 탄력성이 음(-)의 부호이면 탄력성의 크기에 따라 인플레이션 위험은 실질수익의 위험을 증폭시켜서 최적 헤지 전략은 초과 헤지(over-hedge)가 될 수 있다.

주의해야 하는 점은 〈정리 1〉에서 선물가격과 선물환율이 불편타당하며 (즉, $f=E(\tilde{r})$ $f_s=E(\tilde{s})$) 선물시장이 효율적이라는 강한 가정을 두고 이론을 전개하였다. 하지만, 선물가격과 선물환율이 편기되는 경우 〈정리 1〉의 결과가 역전되거나 방향이 불분명한 헤지 결과를 얻을 수도 있다. 선물환율이 편기되는 정도에 따르는 최적 헤지의 결정은 Muller(1997)과 Battermann et al(2000)의 연구들을 참조하기 바란다.

2. 최적 선물 · 옵션의 컴비네이션 헤지

〈그림 1〉에서 나타나 있듯이 인플레이션 위험을 고려한 투자자의 실질수익곡선은 기간별로 증권가격과 환율변화에 비선형적인 행태를 보이게 된다. 이는 물가와 증권가격, 물가와 환율의 상관관계가 제로(0)가 아니기 때문이다. 여기에서는 기간별로 비선형적인 실질수익의 위험을 커버하기 위해 단순한 선물매도 계약과 더불어 옵션을 사용할 때 최적 헤지 전략을 알아본다.

이를 위해 투자자는 선물매도 계약과 더불어 풋 매도계약을 동시에 사용하여 컴비네이션(combination) 헤지를 한다고 하자. 실질수익은 식(2)에서 증권과 외환에 대한 선물매도계약과 풋 매도계약의 정산(settlement)손익을 더해준 값과 같다.

$$\tilde{\pi}=\tilde{\phi}\,\tilde{\Pi}=\tilde{\phi}\,(\tilde{r}\,q+\tilde{s}\,q^{*}+F(f-\tilde{r})+F_s(f_s-\tilde{s}) + V(v-\tilde{k})+V_s(v_s-\widetilde{k_s})) \qquad (6)'$$

앞에서와 같이 $\tilde{\Pi}$는 명목수익, $\tilde{\pi}$는 물가를 고려한 실질수익이다. $\tilde{r}$과 $\tilde{s}$는 국내 증권가격과 환율이며, q와 q^*는 국내와 외국 증권규모이다. $\tilde{\phi}$는 물가요인으로서 물가의 역수이다. F, F_s는 증권과 외환에 대한 선물매도계약(수)이며, f와 f_s는 각각 증권의 선물가격과 선물환율이다. V, V_s는 증권과 외환에 대한 풋 매도계약이며, v와 v_s는 증권과 외환에 대한 풋 옵션의 프리미엄이며 선물가격과 선물환율과 같이 거래당사자간에 결정되는 확정변수이다. 한편, $(-V)$와 $(-V_s)$는 증권과 외환의 풋옵션매입을 나타낸다.

$\tilde{k}$는 증권의 풋 매도계약으로 인한 행사손실이며, $\widetilde{k_s}$은 외환 풋 매도계약의 행사

손실이다. 풋 매도계약은 풋 옵션을 매도할 때 받은 옵션프리미엄과 그 풋 옵션이 나중에 권리가 행사될 때 발생하는 행사손실(excercise loss)의 차이로 인해 순 손익을 발생시킨다. 행사손실은 미리 정해진 행사가격에서 미래 가격을 빼준 값이며, 증권의 풋 매도계약으로 인한 행사손실은 $\tilde{k}= r_e - \tilde{r}$이며, 외환 풋 매도계약의 행사손실은 $\widetilde{k_s}= s_e - \tilde{s}$ 이다. 이때 r_e과 s_e은 각각 증권과 환율의 풋 옵션을 매도할 때 적용되는 행사가격이며 미래 증권가격과 미래 환율의 예상값과 같다고 하자. 즉, $r_e = E(\tilde{r})$, $s_e = E(\tilde{s})$이다.

선물매도계약과 풋 매도계약을 동시에 사용하는 투자자의 예상효용은 다음과 같다. 이때 선택변수는 증권과 외환의 선물매도계약(수) (F, F_s)와 풋 옵션 매도 계약(수) (V, V_s) 이다.

$$Max_{F,F_s,V,V_s} E[U(\tilde{\pi})] \tag{7'}$$

풋 옵션을 사용하여 투자자의 예상효용을 극대화시키는 일차조건식을 구하면 다음과 같다.

$$E[U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}(v-\tilde{k})] = 0 \tag{18}$$

$$E[U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}(v_s-\widetilde{k_s})] = 0 \tag{19}$$

만약 선물가격과 선물환율이 모두 불편타당하다면, $f = E(\tilde{r})$ $f_s = E(\tilde{s})$이다. 또한 풋 옵션의 프리미엄이 불편타당하다면 $v = E(\tilde{k})$, $v_s = E(\widetilde{k_s})$이다. 이 조건과 공분산의 정의를 사용하여 식 (18)과 (19)를 다시 정리하면 일차조건식을 만족시키는 최적 컴비네이션 계약을 구할 수 있다.

$$E(U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})E(v-\tilde{k}) - Cov(\tilde{k}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}) = 0 \tag{20}$$

$$E(U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})E(v_s-\widetilde{k_s}) - Cov(\widetilde{k_s}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}) = 0 \tag{21}$$

풋 옵션 프리미엄이 불편타당하다면 $v = E(\tilde{k})$, $v_s = E(\widetilde{k_s})$이므로 $Cov(\tilde{k}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})$

$=0$, $Cov(\widetilde{k_s}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})=0$이다. 일차조건식을 만족시키는 최적 선물매도와 풋(put) 매도 계약(수)은 물가요인의 증권가격과 환율에 대한 탄력성($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)에 따라 결정된다. 선물과 풋 옵션을 이용한 최적 컴비네이션 헤지거래에서 선물과 풋옵션의 매도계약(수)이 실제 보유증권(수)보다 많은 경우 초과 헤지, 선물과 풋옵션의 매도계약(수)가 실제 보유증권(수)보다 적은 경우 과소 헤지, 선물과 풋옵션의 매도계약(수)가 실제 보유증권(수)과 정확하게 일치하는 경우 완전 헤지라고 정의한다.

일차조건식을 요약하면 다음과 같은 〈정리 2〉을 얻을 수 있다.

정리 2: 선물가격과 선물환율, 옵션프리미엄이 모두 불편타당하고, 물가요인의 증권가격과 환율에 대한 탄력성($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)이 모두 제로(0)이면 최적 컴비네이션 헤지는 완전 헤지이다. 그러나 그 탄력성이 양(+)의 부호를 가지면 최적 컴비네이션 헤지는 과소 헤지이며, 음(-)의 부호를 가지면 탄력성의 절대 값에 따라 최적 헤지는 과소 또는 초과 헤지가 될 수 있다.

증명:

1) $\tilde{\eta}\neq 0$, $\tilde{\xi}\neq 0$, $d_{rs}=0$ 일 때;

선물가격과 선물환율, 옵션 프리미엄이 불편타당하다면 $f=E(\tilde{r})$ $f_s=E(\tilde{s})$, $v=E(\tilde{k})$, $v_s=E(\widetilde{k_s})$이다. 또한 증권가격과 환율이 서로 독립적이라면 $d_{rs}=0$이다. 이 조건과 일차조건식 에서 $Cov(\tilde{k}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})=0$, $Cov(\widetilde{k_s}, U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})=0$이다. $\tilde{k}=r_e-\tilde{r}$ 와 $\widetilde{k_s}=s_e-\tilde{s}$ 의 정의를 이용하면,

$$U''(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,\widetilde{\phi_r}\,(q-F+V)+U'(\tilde{\pi})g'(\tilde{r})=0 \tag{22}$$

$$U''(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,\widetilde{\phi_s}\,(q^*-F_s+V_s)+U'(\tilde{\pi})h'(\tilde{s})=0 \tag{23}$$

식 (22)과 (23)를 다시 정리하면

$$U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}[-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\widetilde{\phi_r}(F-V-q)+\frac{g'(\tilde{r})}{\tilde{\phi}}]=0 \tag{24}$$

$$U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}[-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\widetilde{\phi_s}(F_s-V_s-q^*)+\frac{h'(\tilde{s})}{\tilde{\phi}}]=0 \tag{25}$$

투자자의 절대위험기피정도(α)와 식 (24)과 (25)를 이용하면 투자자의 예상효용을 극대화시키는 선물매도와 풋 매입을 동시에 사용하는 ($F-V$, F_s-V_s)의 최적 컴비네이션 헤지를 구할 수 있다. 주목할 점은 최적 옵션 헤지가 풋 매도(V)가 아닌 풋 매입($-V$)이라는 점이다.

$$F-V=q-\frac{\tilde{\eta}}{\alpha\widetilde{\phi_r}\tilde{r}} \tag{26}$$

$$F_s-V_s=q^*-\frac{\tilde{\xi}}{\alpha\widetilde{\phi_s}\tilde{s}} \tag{27}$$

여기에서 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$는 선물과 옵션 헤지가 있을 때 증권가격과 환율 변동에 대한 실질수익곡선의 기울기를 각각 나타내며, 증권가격과 환율이 수익에 미치는 효과에서 인플레이션 위험의 가중치를 더해준 값이다.[12] 식 (26)과 (27)에서 최적 컴비네이션 헤지는 초기 보유하고 있는 국내외증권규모(q, q^*)에서 물가요인($\tilde{\phi}$)의 증권가격과 환율에 대한 탄력성($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)에 따라 결정된다. $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 부호가 양(+)이면 최적 컴비네이션 헤지는 과소 헤지이며, 반대로 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 부호가 음(-)이면 최적 컴비네이션 헤지($F-V$, F_s-V_s)는 탄력성의 절대값에 따라 과소 또는 초과 헤지이다. 이는 $\tilde{\eta}<0$, $\tilde{\xi}<0$인 경우 그 탄력성의 절대값이 국내외 증권의 수익비중(δ_r, δ_s)보다 크게 된다면 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$가 양(+)에서 음(-)으로 부호가 전환되기 때문

12) 이때 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$는 선물과 옵션 헤지가 없을 때와 있을 때 그 크기가 서로 다르다. 즉, 선물과 옵션 헤지가 있을 때 $\widetilde{\phi_r}=\tilde{\phi}(1+\frac{\tilde{\eta}}{\delta''_r})$, $\widetilde{\phi_s}=\tilde{\phi}(1+\frac{\tilde{\epsilon}}{\delta''_s})$이다. 이때 δ''_r는 선물과 옵션 헤지가 있을 때 전체수익에서 국내증권이 차지하는 비중($\delta''_r=\frac{\tilde{r}(q-F+V)}{\Pi}$)이며, δ''_s는 해외증권이 차지하는 비중($\delta''_{s=}\frac{\tilde{s}(q^*-F_s+V_s)}{\Pi}$)이다.

이다. 따라서 $\tilde{\eta}<0$, $\tilde{\xi}<0$인 경우 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 절대값이 국내외 증권의 수익비중(δ_r, δ_s) 보다 작으면 초과 헤지, 그 절대값이 증가하여 국내외 증권의 수익비중보다 크다면 과소 헤지가 최적 헤지이다.

2) $\tilde{\eta}=0$, $\tilde{\xi}=0$, $d_{rs}=0$ 일 때;

선물가격과 선물환율이 불편타당하고($f=E(\tilde{r})$ $f_s=E(\tilde{s})$), 옵션 프리미엄이 불편타당하며($v=E(\tilde{k})$, $v_s=E(\widetilde{k_s})$), 증권가격과 환율이 서로 독립적일 때 ($d_{rs}=0$), $\tilde{\eta}=\tilde{\xi}=0$의 조건과 식 (26)과 (27)에서 투자자의 예상효용을 극대화시키는 최적 컴비네이션 헤지는 완전 헤지이며, $F-V=q$, $F_s-V_s=q^*$이다.

3) $\tilde{\eta}\neq 0$, $\tilde{\xi}\neq 0$, $d_{rs}\neq 0$ 일 때;

선물가격과 선물환율이 불편타당하고($f=E(\tilde{r})$ $f_s=E(\tilde{s})$), 옵션 프리미엄이 불편타당하며($v=E(\tilde{k})$, $v_s=E(\widetilde{k_s})$), 증권가격과 환율이 서로 영향을 미칠 때 ($d_{rs}\neq 0$), 이 조건과 일차조건식에서 $Cov(\tilde{k},U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})=0$, $Cov(\widetilde{k_s},U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi})=0$ 이다. $\tilde{k}=r_e-\tilde{r}$ 와 $\widetilde{k_s}=s_e-\tilde{s}$의 정의를 이용하면,

$$\begin{aligned}&U''(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,[\widetilde{\phi_r}\,(q-F+V)+\widetilde{\phi_s}\,(q^*-F_s+V_s)d_{rs}]\\&\quad+U'(\tilde{\pi})[g'(\tilde{r})+h'(\tilde{s})d_{rs}]=0\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}&U''(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,[\widetilde{\phi_s}\,(q^*-F_s+V_s)+\widetilde{\phi_r}\,(q-F+V)d_{rs}]\\&\quad+U'(\tilde{\pi})[h'(\tilde{s})+g'(\tilde{r})d_{rs}]=0\end{aligned}\tag{29}$$

식 (28)과 (29)를 다시 정리하면,

$$\begin{aligned}&U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,[-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\widetilde{\phi_r}\,(F-V-q)+\frac{g'(\tilde{r})}{\tilde{\phi}}\\&\quad-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\widetilde{\phi_s}\,(F_s-V_s-q^*)d_{rs}+\frac{h'(\tilde{s})}{\tilde{\phi}}d_{rs}]=0\end{aligned}\tag{30}$$

$$U'(\tilde{\pi})\tilde{\phi}\,[-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\widetilde{\phi_s}\,(F_s - V_s - q^*) + \frac{h'(\tilde{s})}{\tilde{\phi}}$$
$$-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})}\widetilde{\phi_r}\,(F - V - q)d_{rs} + \frac{g'(\tilde{r})}{\tilde{\phi}}d_{rs}] = 0 \tag{31}$$

$-\frac{U''(\tilde{\pi})}{U'(\tilde{\pi})} = \alpha$ 와 식 (30)과 (31)를 이용하면 예상효용을 극대화시키는 최적 컴비네이션 헤지를 구할 수 있다.

$$F - V = q - \frac{\tilde{\eta}}{\alpha\widetilde{\phi_r}\,\tilde{r}} - \Delta'_{rs} \tag{32}$$

$$F_s - V_s = q^* - \frac{\tilde{\xi}}{\alpha\widetilde{\phi_s}\tilde{s}} - \Delta'_{sr} \tag{33}$$

여기에서 Δ'_{rs}와 Δ'_{sr}는 증권가격(환율)이 실질수익에 미치는 직접효과 이외에 환율(증권가격) 변동을 통해 수익에 미치는 간접효과를 커버하기 위해 추가적으로 필요한 헤지 부분이다. 이때 $\Delta'_{rs} = [\frac{\widetilde{\phi_s}}{\widetilde{\phi_r}}(F_s - V_s - q^*) + \frac{\tilde{\xi}}{\alpha\widetilde{\phi_r}\,\tilde{s}}]d_{rs}$, $\Delta'_{sr} = [\frac{\widetilde{\phi_r}}{\widetilde{\phi_s}}(F - V - q) + \frac{\tilde{\eta}}{\alpha\widetilde{\phi_s}\,\tilde{r}}]d_{rs}$이며 Δ'_{rs}와 Δ'_{sr}의 크기와 부호는 $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$와 헤지규모 $(F_s - V_s - q^*)$, $(F - V - q)$에 따라 결정된다. 증권가격과 환율이 서로 독립적일 때의 경우에 비해 두 변수가 서로 영향을 미칠 때 최적 헤지의 결정은 조금 복잡하지만 결과는 유사하다. 즉, 증권가격과 환율이 서로 영향을 미칠 때 최적 컴비네이션 헤지는 물가요인에 대한 증권가격과 환율에 대한 탄력성($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)에 따라 결정된다. $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 부호가 양(+)이면 최적 컴비네이션 헤지는 과소 헤지이며, 반대로 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 부호가 음(-)이면 최적 컴비네이션 헤지($F - V$, $F_s - V_s$)는 탄력성의 절대값에 따라 과소 또는 초과 헤지이다. 이는 $\tilde{\eta} < 0$, $\tilde{\xi} < 0$인 경우 그 탄력성의 절대값이 국내외증권의 수익비중보다 크다면 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$가 양(+)에서 음(-)으로 부호가 전환되기 때문이다. 따라서 $\tilde{\eta} < 0$, $\tilde{\xi} < 0$일때 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 절대값이 δ_r와 δ_s보다 작으면 초과 헤지, 그 절대값이 국내외 증권의 수익비중보다 크다면 과소 헤지가 최적 헤지이다.

〈정리 2〉은 국내외 증권에 투자하는 국내 투자자가 증권가격과 환율의 변동위험 뿐 아니라 인플레이션 위험에 노출되어 있을 때 실질수익위험을 커버하는 최적 헤지는 단순한 선물매도보다는 풋 옵션매입을 동시에 사용하는 컴비네이션 헤지가 필요하다. 이때 최적 컴비네이션 헤지는 물가요인의 증권가격과 환율에 대한 탄력성($\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$)에 따라 결정된다. 증권가격(환율)에 대한 물가요인의 탄력성이 양(+)의 부호이면, 인플레이션 위험은 오히려 실질수익의 위험을 감소시켜서 금융 헤지의 필요성을 줄여주는 역할을 하면서 최적 컴비네이션 헤지전략은 과소 헤지이다. 하지만 증권가격(환율)에 대한 물가요인의 탄력성이 음(-)의 부호이면 그 탄력성의 크기에 따라 인플레이션 위험은 실질수익의 위험을 증폭시켜서 최적 컴비네이션 헤지 전략은 초과 헤지가 될 수 있다.

앞에서 일정하다고 가정한 위험기피정도와 가격(환율)변동성이 증가할 때 최적 선물・옵션 헤지는 다르게 변화할 것이다. 만약 가격과 환율의 변동성이 증가하거나 절대위험기피정도가 증가하면 최적선물과 옵션 헤지는 $g'(\tilde{r})$와 $h'(\tilde{s})$의 부호와 크기에 따라 변화하게 된다. 증권가격과 환율변동성의 증가는 최적 헤지규모를 증가시키는데 반해 절대위험기피정도의 증가는 최적 헤지규모를 감소시켜서 불완전 헤지 규모를 줄이고 완전 헤지에 접근하는 경향을 보인다. 이는 국내 투자자가 자신의 위험기피정도가 클수록 불완전 헤지 보다는 완전 헤지를 선호하기 때문이다.

Ⅳ. 인플레이션 위험에 대한 동태적 헤지와 추정결과

투자자의 위험기피정도(α), 국내외 증권자산의 비중 (δ_r, δ_s) 등이 주어졌을 때 인플레이션 위험을 고려하는 투자자의 최적 선물・옵션 헤지는 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 부호와 크기에 따라 결정된다. $\tilde{\eta} > 0$, $\tilde{\xi} > 0$인 경우 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 크기가 증가할수록 최적 헤지가 감소하며 (과소 헤지), 반대로 $\tilde{\eta} < 0$, $\tilde{\xi} < 0$인 경우 최적 선물·옵션 헤지는 과소 또는 초과 헤지이다. 음의 부호를 가진 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 절대값이 국내외 증권의 수익비중보다 작으면 초과 헤지, 그 절대값이 증가하여 국내외 증권의 수익비중보다 크면 과소 헤지가 최적 헤지이다. 이는 $\tilde{\eta} < 0$, $\tilde{\xi} < 0$인 경우 그 탄력성의 절대값이 증가하면서 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$가 (+)에서 (-)로 부호가 전환되기 때문이다.

여기에서는 인플레이션 위험이 존재할 때 기간에 따라 최적 헤지가 어떻게 동태

적으로 변화되는지를 살펴보고자 한다. 기간별 동태적인 최적 헤지는 이론에서 보았듯이 기간별로 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 부호와 크기가 달라지면서 변화하게 된다. 따라서 이 연구에서 인플레이션 위험에 대한 동태적 헤지의 개념은 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 부호와 크기가 기간에 따라 달라지는 동태적인 행태를 보일 때 최적 컴비네이션 헤지가 어떻게 달라지는지를 살펴보는 것이다. 동태적 헤지 전략을 구하기 위해 먼저 장기와 단기를 구분해야 하는데 이 연구에서는 회계학적 기간보다는 기간별로 $\tilde{\eta}$와 $\tilde{\xi}$의 예상 변화로 기간을 구분하기로 한다. 만약 자산시장이 효율적인 경우 자본이동은 증권가격 또는 수익률에 탄력적이며 증권가격에 대한 물가요인의 탄력성, $\tilde{\eta}$는 일반적으로 음(-)의 부호를 가지게 된다. 또한 장기적일수록 자산시장의 탄력성이 더욱 증가하면서 증권가격과 물가의 관계가 보다 탄력적이며 물가의 역수를 나타내는 물가요인의 증권가격에 대한 탄력성은 그 절대값이 더욱 커지는 경향을 보일 것이다. 결국, $\tilde{\eta}$는 단기와 장기에 모두 음(-)의 부호를 가지며, 그 절대값이 장기로 갈수록 커지는 특성을 보일 것이다. 이 같은 특성과 앞에서 도출된 〈정리 1〉과 〈정리 2〉을 이용하면 인플레이션 위험이 있을 때 증권가격의 변동위험에 대한 최적 헤지는 단기에 초과 헤지, 장기에 과소 헤지이다.

한편, 재화의 교역시장은 단기적으로 비탄력적이어서 환율과 물가요인의 관계를 나타내는 $\tilde{\xi}$는 단기에 양(+)의 부호를 장기에 음(-)의 부호로 전환되는 동태적 행태를 보이게 된다. 이러한 $\tilde{\xi}$의 동태적 변화를 〈정리 1〉과 〈정리 2〉에 적용하면 기간에 따라 환위험에 대한 최적 헤지는 단기적으로 과소 헤지를, 장기적으로는 그 탄력성의 절대값 크기에 따라 초과 또는 과소 헤지를 보일 것이다.

앞에서 도출된 이론적인 최적 헤지를 보다 자세하게 살펴보기 위해 $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$의 부호와 크기가 기간에 따라 변화할 때 최적 헤지의 규모를 실증적으로 추정해 보았다. 이를 위해 $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$가 -10.0과 10.0사이에서 0.5 단위(scale)로 일정하게 변화한다고 가정하였다. 국내증권$(q)=100$, 해외증권$(q^{*})=100$이며, 초기 물가요인(ϕ), 증권가격(r)과 환율(s)이 각각 1이며, $E(\tilde{\phi})=1$, $E(\tilde{\gamma})=1$, $E(\tilde{s})=1$ 이라고 가정한다. 선물가격과 선물환율이 불편타당하다면 $f=E(\tilde{r})$, $f_s=E(\tilde{s})$이며, 옵션 프리미엄이 불편타당하다면 $v=E(\tilde{k})$ $v_s=E(\widetilde{k_s})$이다. 국내외 증권의 자산가치가 전체 자산에서 차지하는 비중은 각각 0.5이며, 증권가격(환율) 변동이 환율(증권가격)에 미치는 효과(drs)는 서로 일정하며 0.2라고 가정한다. 이 조건들을 이용하여

〈표 1〉 최적 컴비네이션 헤지에 대한 추정결과:

$$F-V=q-\frac{\tilde{\eta}}{\alpha\widetilde{\phi_r}\,\tilde{r}}-\Delta'_{rs};\ F_s-V_s=q^*-\frac{\tilde{\xi}}{\alpha\widetilde{\phi_s}\tilde{s}}-\Delta'_{sr}$$

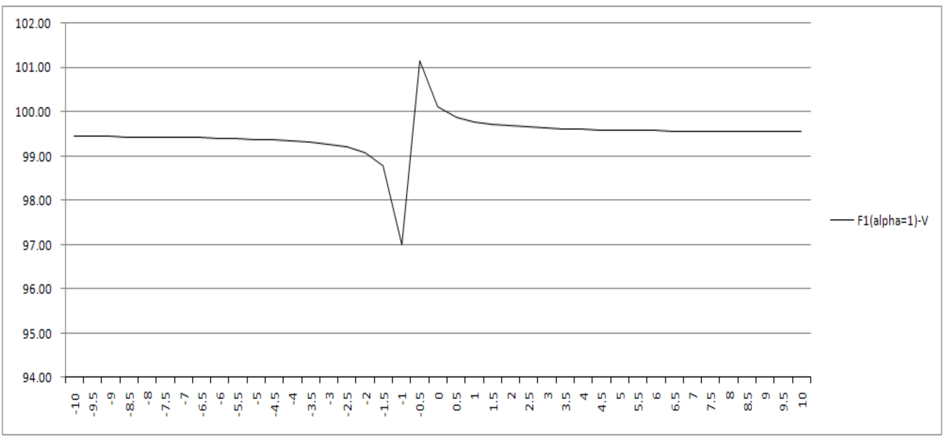
$\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$	$d_{sr}\neq 0$일 때 수익곡선 기울기 $(\widetilde{\phi_r}(\widetilde{\phi_s}))$	$F1(\alpha=1)-V$	$F1-V-q$	$F5(\alpha=5)-V$	$F5-V-q$	$F10(\alpha=10)-V$	$F10-V-q$
-10	-18.4	99.446	-0.554	99.889	-0.111	99.945	-0.055
-9.5	-17.4	99.443	-0.557	99.889	-0.111	99.944	-0.056
-9	-16.4	99.439	-0.561	99.888	-0.112	99.944	-0.056
-8.5	-15.4	99.435	-0.565	99.887	-0.113	99.944	-0.056
-8	-14.4	99.431	-0.569	99.886	-0.114	99.943	-0.057
-7.5	-13.4	99.425	-0.575	99.885	-0.115	99.943	-0.057
-7	-12.4	99.419	-0.581	99.884	-0.116	99.942	-0.058
-6.5	-11.4	99.412	-0.588	99.882	-0.118	99.941	-0.059
-6	-10.4	99.404	-0.596	99.881	-0.119	99.940	-0.060
-5.5	-9.4	99.394	-0.606	99.879	-0.121	99.939	-0.061
-5	-8.4	99.381	-0.619	99.876	-0.124	99.938	-0.062
-4.5	-7.4	99.365	-0.635	99.873	-0.127	99.936	-0.064
-4	-6.4	99.344	-0.656	99.869	-0.131	99.934	-0.066
-3.5	-5.4	99.315	-0.685	99.863	-0.137	99.931	-0.069
-3	-4.4	99.273	-0.727	99.855	-0.145	99.927	-0.073
-2.5	-3.4	99.206	-0.794	99.841	-0.159	99.921	-0.079
-2	-2.4	99.083	-0.917	99.817	-0.183	99.908	-0.092
-1.5	-1.4	98.786	-1.214	99.757	-0.243	99.879	-0.121
-1	-0.4	97.000	-3.000	99.400	-0.600	99.700	-0.300
-0.5	0.6	101.167	1.167	100.233	0.233	100.117	0.117
0	1.6	100.125	0.125	100.025	0.025	100.013	0.013
0.5	2.6	99.885	-0.115	99.977	-0.023	99.988	-0.012
1	3.6	99.778	-0.222	99.956	-0.044	99.978	-0.022
1.5	4.6	99.717	-0.283	99.943	-0.057	99.972	-0.028
2	5.6	99.679	-0.321	99.936	-0.064	99.968	-0.032
2.5	6.6	99.652	-0.348	99.930	-0.070	99.965	-0.035
3	7.6	99.632	-0.368	99.926	-0.074	99.963	-0.037
3.5	8.6	99.616	-0.384	99.923	-0.077	99.962	-0.038
4	9.6	99.604	-0.396	99.921	-0.079	99.960	-0.040
4.5	10.6	99.594	-0.406	99.919	-0.081	99.959	-0.041
5	11.6	99.586	-0.414	99.917	-0.083	99.959	-0.041
5.5	12.6	99.579	-0.421	99.916	-0.084	99.958	-0.042
6	13.6	99.574	-0.426	99.915	-0.085	99.957	-0.043
6.5	14.6	99.568	-0.432	99.914	-0.086	99.957	-0.043
7	15.6	99.564	-0.436	99.913	-0.087	99.956	-0.044
7.5	16.6	99.560	-0.440	99.912	-0.088	99.956	-0.044
8	17.6	99.557	-0.443	99.911	-0.089	99.956	-0.044
8.5	18.6	99.554	-0.446	99.911	-0.089	99.955	-0.045
9	19.6	99.551	-0.449	99.910	-0.090	99.955	-0.045
9.5	20.6	99.549	-0.451	99.910	-0.090	99.955	-0.045
10	21.6	99.546	-0.454	99.909	-0.091	99.955	-0.045

* α는 절대위험기피정도, $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$는 물가의 증권가격(환율)에 대한 탄력성, $\widetilde{\phi_r}(\widetilde{\phi_s})$는 증권가격(환율)에 대한 실질수익곡선의 기울기, $F-V$는 선물과 풋옵션의 컴비네이션 매도계약(수), $F-V-q$는 초과 헤지의 규모이다. $F1-V$, $F5-V$, $F10-V$은 $\alpha=0$, 5, 10 일 때 선물과 풋옵션의 매도계약(수)이다.

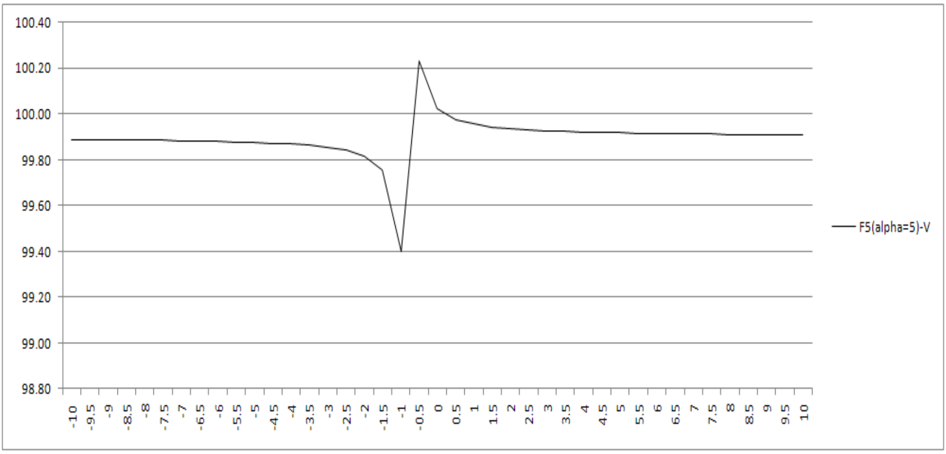
(증권가격과 환율이 서로 영향을 미칠 때) 식 (32)과 (33)에 대입하여 최적 컴비네이션 헤지 $F-V=q-\frac{\tilde{\eta}}{\alpha\widetilde{\phi_r}\,\tilde{r}}-\Delta'_{rs}$, $F_s-V_s=q^*-\frac{\tilde{\xi}}{\alpha\widetilde{\phi_s}\tilde{s}}-\Delta'_{sr}$를 추정해 보았는데 그 결과는 〈표 1〉에 나타나 있다. 〈표 1〉은 서로 다른 위험기피정도(α)에서 $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$의 부호와 크기에 따라 동태적인 최적 헤지의 변화를 자세하게 보여주고 있다. $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$이 음의 부호인 경우 $-0.5<\tilde{\eta}(\tilde{\xi})<0$ 사이에서 최적 컴비네이션 헤지는 초과 헤지이나, $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})<-0.5$인 경우 최적 헤지는 과소 헤지이다.

이는 $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})<0$ 인 경우 그 절대값이 국내외 증권의 수익비중(여기에서는 0.5)을 기준으로 0.5보다 크면 $\widetilde{\phi_r}$와 $\widetilde{\phi_s}$가 양(+)에서 음(-)으로 부호가 전환되기 때문이다. 이 추정결과는 이론에서 도출한 〈정리 2〉와 일치한다. 한편, $\tilde{\xi}$의 경우 이론적으로 단기에는 양(+)의 부호를, 장기에는 음(-)의 부호를 가지는 경향이 있다. 따라서 〈정리 2〉에 따르면 환율변동 위험에 대한 최적 컴비네이션 헤지는 단기에는 과소 헤지, 장기에는 그 절대값에 따라 처음에는 초과 헤지, 나중에는 과소 헤지가 나타난다. 〈표 1〉에서 추정결과는 〈정리 2〉를 강하게 뒷받침하고 있다. 〈그림 2〉~〈그림 4〉는 국내 투자자의 위험기피정도가 각각 α=1, 5, 10 일 때 최적 컴비네이션 헤지의 크기를 그림으로 나타내고 있다. 가로축은 $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$의 크기이며, -10.0과 +10.0 사이에서 0.5 단위(scale)로 일정하게 변화시켰다. 세로축은 최적 헤지의 규모이다.

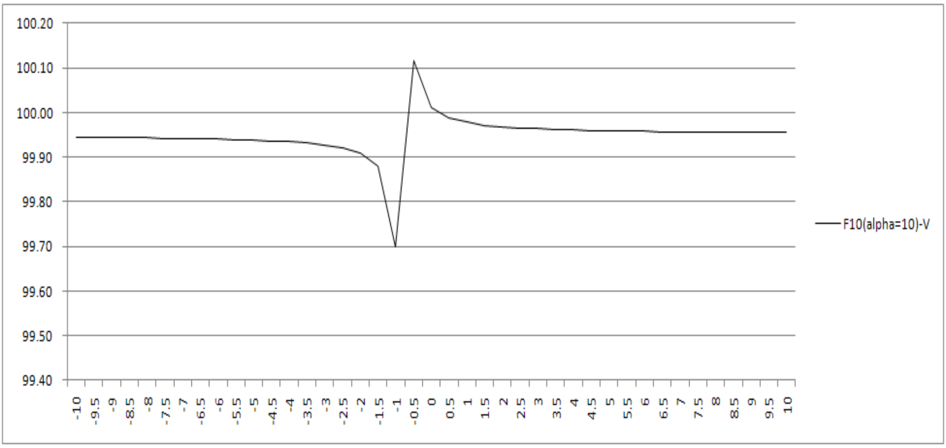
〈그림 2〉 $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$에 대한 (기간별) 동태적 최적 컴비네이션 헤지의 변화 ($\alpha=1$, $\tilde{\xi}(\tilde{\eta})=-1$일 때)



〈그림 3〉 $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$에 대한 (기간별) 동태적 최적 컴비네이션 헤지의 변화 ($\alpha=5$, $\tilde{\xi}(\tilde{\eta})=-1$일 때)



〈그림 4〉 $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$에 대한 (기간별) 동태적 최적 컴비네이션의 변화 ($\alpha=10$, $\tilde{\xi}(\tilde{\eta})=-1$ 일 때)



흥미로운 사실은 $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$이 음의 부호인 경우 $-0.5<\tilde{\eta}(\tilde{\xi})<0$ 사이에서 최적 헤지$(F-V)$는 초과 헤지를 보인 후에 $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})<-0.5$ 일 때 초과 헤지에서 과소 헤지로 전환되는 속도가 아주 빠르다는 점이다. 이는 $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$의 크기에 따라 국내 증권자산의 비중(=0.5)을 기준으로 실질수익곡선의 기울기 (δ_r, δ_s)가 급격히 변화하기 때문이다. 〈그림 2〉~〈그림 4〉에서 위험기피정도가 증가할수록 최적 헤지 규모가 변화하는데 위험기피정도(α)를 1, 5, 10 으로 증가시킬 때 최적 헤지는 초과 (또는 과소) 헤지 부분이 줄어들고 완전 헤지에 가깝게 접근하고 있다. 이는 위험기피

정도가 클수록 초과 또는 과소 헤지의 규모를 줄이고 완전 헤지에 가깝게 하여 증권가격과 환율변동 위험으로 인한 손실가능성을 가급적 줄이려는 위험기피자의 특성 때문으로 보인다. 또한, 국내 투자자의 위험기피정도가 클수록 기간별로 동태적 최적 헤지의 변동성이 점차 감소하며, 위험기피정도가 10일 때 최적 헤지의 변동성이 가장 작다. 그 이유는 식 (32), (33)의 우변 둘째 항에서 α가 증가할 때 초과 헤지 $(F-V-q)$의 규모가 감소하기 때문이다. 이는 위험기피정도가 클수록 투자자들이 최적 헤지에서 초과(과소) 헤지 규모를 줄이려고 하며, 그에 따라 최적 헤지의 변동성이 줄어들게 된다.

V. 요약과 결론

인플레이션 위험은 포트폴리오투자에서 물가변동이 명목적인 손실 보다는 실질 투자손실을 가져올 가능성을 말하며 국내 투자가가 국제포트폴리오 투자에서 명목 수익보다는 실질수익에 관심을 가지고 있을 때 발생한다. 이 연구는 시장에서 거래가 불가능한 인플레이션 위험과 거래가 가능한 증권가격의 변동위험과 환위험이 동시에 존재할 때 투자수익위험을 커버하기 위한 최적 헤지가 어떻게 결정되는지 살펴보았다. 거래가 불가능한 인플레이션 위험은 증권가격위험이나 환위험에 대해 독립적이 아니며 비선형적인 형태를 보이게 되며, 장・단기적으로 그 관계가 서로 다르게 변화하는 동태적 반응을 보인다. 이 경우 인플레이션 위험은 투자자들로 하여금 완전 헤지(full hedge) 전략보다는 불완전 헤지 전략을 추구하는 유인을 가지게 한다. 또한 인플레이션 위험이 존재할 때 실질수익곡선은 기간별로 비선형적인 위험구조를 가지게 되며, 이러한 기간별로 서로 다른 수익위험을 커버하기 위해 단순한 선물매도 헤지보다는 선물매도와 풋 옵션 매입의 컴비네이션 헤지가 필요하며, 증권가격과 인플레이션의 동태적 관계에 따라 기간별로 서로 다른 헤지 전략이 필요하다.

인플레이션 위험을 고려하여 증권가격위험과 환위험에 노출된 실질수익에 대한 최적 헤지는 물가요인과 증권가격, 환율의 상관관계에 따라 결정된다. 선물가격과 선물환율이 불편타당하고, 물가요인에 대한 증권가격과 환율의 탄력성이 양(+)이라면 최적 헤지는 과소 헤지이나, 그 탄력성이 음(-)이면 최적 헤지는 탄력성의 절대크기에 따라 초과 또는 과소 헤지가 된다. 만약 그 탄력성의 절대값이 국내외 증

권의 수익에서 차지하는 비중보다 작다면 초과 헤지가 최적 헤지이며, 국내외 증권의 수익에서 차지하는 비중보다 크다면 과소 헤지가 최적 헤지이다. 또한, 물가요인의 증권가격과 환율에 대한 탄력성이 제로(0)라면 최적 헤지는 완전 헤지이다. 비교정학적인 연구에서 절대위험기피정도의 증가는 불완전 헤지 부분을 감소시키고 최적 헤지를 완전 헤지와 가깝게 유지하려는 특성을 보인다. 이는 국내 투자자가 자신의 위험기피정도가 클수록 불완전 헤지 보다는 완전 헤지를 선호하기 때문이다.

물가에 대한 증권가격과 환율의 탄력성의 부호와 크기는 단기와 장기에서 서로 달라서 기간별로 변화하는 특성을 보이게 된다. 이 경우 기간별로 그 탄력성 변화에 따르는 동태적 최적 헤지를 구할 수 있다. 여러 조건을 이용하여 이론적으로 도출한 최적 헤지를 실증적으로 검증한 결과에서 증권가격위험에 대한 최적 헤지는 단기에 초과 헤지, 장기에 과소 헤지 이었으나, 환위험에 대한 최적 헤지는 단기에 과소 헤지, 장기적으로 초과 헤지와 과소 헤지가 반복적으로 나타났다. 이 같은 실증결과는 이론적인 최적 헤지와 정확하게 일치하고 있어서 연구의 이론적 결과를 뒷받침하고 있다. 한편, 투자자의 위험기피정도에 따르는 동태적 최적 헤지의 변화를 살펴보았는데 위험기피정도가 클수록 동태적 최적 헤지의 변동성이 점차 감소하며, 투자자들이 최적 헤지에서 초과(과소) 헤지 규모를 줄이려고 하며, 완전 헤지를 유지하려는 경향을 보이고 있다.

이 연구는 기존연구와 다르게 인플레이션 위험이 존재하나 그 위험을 직접적으로 헤지할 수 없는 경우 최적 헤지 전략을 동태적으로 살펴보고 있다는 점에서 그 의미가 크다. 하지만, 이론에서 선물가격과 선물환율의 불편타당성에 대한 가정은 아주 강한 가정으로서 현실적으로 선물가격(환율)이 편기될 수 있으며, 이 경우 최적 헤지는 이 연구의 결과와 다르게 나타날 수 있다. 선물가격과 선물환율의 편기성으로부터 발생하는 최적 헤지에 대한 연구는 미래 연구과제로 남겨놓고자 한다.

■ 참 고 문 헌

1. Anderson, R. and J. Danthine, "Cross Hedging," *Journal of Political Economy*, 89(6), 1981, pp. 1182-1196.
2. Battermann, H., M. Braulke, and U. Broll, J. Schimmelpfennig, "The Preferred Hedge Instrument," *Economic Letters*, 66, 2000, pp. 85-91.
3. Beber, A. and M. Brandt, "Resolving Macroeconomics Uncertainty in Stock and Bond Markets," *National Bureau of Economic Research* WP no. 2006, 2006.
4. Broll, U., K. Chow, and K. Wong, "Hedging and Nonlinear Risk Exposure," *Oxford Economic Papers*, 53, 2001, pp. 281-296.
5. Broll, U., and B. Eckwert, "Market Structure and Multiperiod Hedging," *International Review of Economics and Finance*, 9, 2000, pp. 291-298.
6. Broll, U., J. Wahl, and I. Zilcha, "Indirect Hedging of Exchange Rate Risk," *Journal of International Money and Finance*, 14(5), 1995, pp. 667-678.
7. ______________________________, "Hedging Exchange Risk: The Multiperiod Case," *Research in Economics*, 53, 1999, pp. 365-380.
8. Chinn, M. and G. Meredith, "Testing Uncovered Interest Parity at Short and Long Horizons During The Post-Bretton Woods Era," *National Bureau of Economic Research* WP no. 11077, 2005.
9. Edward, S., "Floating Exchange Rates in Less-Developed Countries," *Journal of Money, Credit and Banking*, 15(1), 1983, pp. 73-81.
10. Forbes, K., "Why Do Foreigners Invest in the U.S.?," *National Bureau of Economic Research* WP no. 13908, 2008.
11. Giofre, M., "The Role of Information Asymmetries and inflation hedging in International Equity Portfolios," *Journal of Multinational Financial Management*, 19(2), 2009, pp. 237-255.
12. Gurkaynak, R. and J. Wolfers, "Macroeconomic Derivatives: An Initial Analysis of Market-Based macro Forecasts, Uncertainty, and Risk," *National Bureau of Economic Research* WP no. 11929, 2006.
13. Hau, H. and H. Rey, "Can Portfolio Rebalancing Explain the Dynamics of Equity Returns, Equity Flows, and Exchange Rates?," *American Economic Review*, 2004, pp. 126-133.
14. Holthausen, D., "Hedging and the Competitive Firm under Price Uncertainty," *The American Economic Review*, 69, 1979, pp. 989-995.
15. Jarrow, R., and Y. Yildirim, "Pricing Treasury Inflation Protected Securities and Related Derivatives using an HJM Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 38(2), 2003, pp. 337-358.
16. Lane, P., and G. Milesi-Ferretti, "International Investment Patterns," *Review of Economics and Statistics*, 90(3), 2008, pp. 538-549.
17. ______________________________, "The External Wealth of nations: Measures of Foreign Assets and Liabilities for Industrial and developing Countries," *Journal of*

International Economics, 55, 2001, pp. 263-294.

18. Lence, S., "On the Optimal Hedge Under Unbiased Futures Prices," *Economic Letters*, 47, 1995, pp. 385-388.
19. Lioui, A and P. Poncet, "General Equ8ilbrium Pricing of CPI Derivatives," *Journal of Banking & Finance*, 29, 2005, pp. 1265-1294.
20. Liu, K. J. Geaun, L. Lei, "Optimal Hedging Decisions for Taiwanese Corn Traders on the Way to Liberalization," *Agricultural Economics*, 25, 2001, pp. 303-309.
21. Martin, P. and H. Rey, "Financial Super-markets: Size Matters for Asset Trade," *Journal of International Economics*, 64, 2004, 335-361.
22. Muller, A., "Export and Hedging Decisions under Revenue and Exchange Rate Risk: A Note," *European Economic Review*, 41, 1997, pp. 1421-1426.
23. __________, "Hedging Price Risk When Real Wealth Matters," *Journal of International Money and Finance*, 19, 2000, pp. 549-560.
24. Patel, J. and R. Zeckhauswer, "Treasury Bill Futures as Hedge Against Inflation Risk," *National Bureau of Economic Research* WP no. 2322, 1987.
25. Pavlova, A. and R. Rigobon, "Asset Prices and Exchange Rates," *National Bureau of Economic Research* WP no. 9834, 2003.
26. Portes, R. and H. Rey, "The Determinants of Cross-Border Equity Flows," *Journal of International Economics*, 65, 2005, pp. 269-296.
27. Rao, V., "Preference-Free Optimal Hedging Using Futures," *Economic Letters*, 66, 2000, pp. 223-228.
28. Sandmo, A., "On the Theory of the Competitive Firm Under Price Uncertainty," *The American Economic Review*, 61, 1971, pp. 65-73.
29. Wu, Y., "Stock Prices and Exchange Rates in a VEC Model: The Case of Singapore in the 1990s," *Journal of Economics and Finance*, 24, 2000, pp. 260-274.
30. Chicago Mercantile Exchange, www.cmegroup.com

Dynamic Hedging Against Inflation Risk

Heeho Kim*

Abstract

This study purposes to examine how optimal hedging is determined against the uncertainty of real revenue when there exist tradable risk of asset price and exchange as well as untradable inflation risk at a time. In particular, when inflation shows a dynamic relationship between asset price and exchange rate, the real revenue schedule would be nonlinear to risk of asset price and exchange rate. Optimal combination hedge using short futures and long put is required to hedge against this nonlinear revenue schedule corresponding to asset price risk or exchange risk. Also a dynamic hedging strategy is analyzed for a dynamic relationship between inflation, asset price and exchange rate.

Key Words: inflation risk, exchange risk, nonlinear option

Received: April 20, 2010. Revised: July 19, 2010. Accepted: Aug. 24, 2010.

* Professor, Department of Economics, Kyungpook National University, 1370 Samgyuk-3dong, Buk-gu, Daegu 702-701, Korea, Phone: +82-53-950-5438, e-mail: kimhh@knu.ac.kr